6. Thema: Integralrechnung

6.1 Berechnen Sie folgende Integrale durch lineare Substitution:

a) $\int \sqrt{2x+b}\, dx$ b) $\int \sin(4t-\varphi)\, dt$ c) $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-1)^2}$

Lösung:

a) $\int \sqrt{2x+b}\, dx$

$$\text{lineare Substitution:}$$
$$z = 2x+b$$
$$\frac{dz}{dx} = 2 \ \rightarrow dx = \frac{dz}{2}$$

$$\int \sqrt{2x+b}\, dx = \int \sqrt{z}\frac{dz}{2} = \frac{3}{2}\cdot z^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}(2x+b)^{\frac{3}{2}} + C}}$$

b) $\int \sin(4t-\varphi)\, dt$

$$\text{lineare Substitution:}$$
$$z = 4t-\varphi$$
$$\frac{dz}{dt} = 4 \ \rightarrow dt = \frac{dz}{4}$$

$$\int \sin(4t-\varphi)\, dt = \int \sin(z)\frac{dz}{4} = -\frac{1}{4}\cos(z) + C = \underline{\underline{-\frac{1}{4}\cos(4t-\varphi) + C}}$$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-1)^2}$

$$\text{lineare Substitution:}$$
$$z = (3x-1)$$
$$\frac{dz}{dx} = 3 \ \rightarrow dx = \frac{dz}{3}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3x-1)^2} = \int_{x=1}^{x=2} \frac{1}{z^2}\frac{dz}{3} = \left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}\right]_{x=1}^{x=2} = \left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x-1}\right]_{x=1}^{x=2} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$$

6.2 Berechnen Sie die unbestimmten Integrale mit den angegebenen Methoden. Alle dazu notwendigen Zwischenschritte müssen klar erkennbar sein:

$J = \int \sqrt{(8x+17)^5}\,dx$ $\qquad J = \int x^3 \ln(3x)\,dx$ $\qquad J = \int \frac{2x-1}{x\,(x+3)^2}\,dx$

a) lineare Substitution b) partielle Integration c) Partialbruchzerlegung

Lösung:

a) $\int \sqrt{(8x+17)^5}\,dx$

lineare Substitution:

$z = 8x + 17$

$\frac{dz}{dx} = 8 \;\rightarrow\; dx = \frac{dz}{8}$

$$\int \sqrt{(8x+17)^5}\,dx = \int z^{\frac{5}{2}} \frac{dz}{8} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot z^{\frac{7}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{1}{28}\sqrt{(8x+17)^7} + C}}$$

b) $\int x^3 \ln(3x)\,dx$

partielle Integration: $\int u' \cdot v\,dx = u \cdot v - \int v' \cdot u\,dx$

$u' = x^3 \qquad u = \frac{1}{4}x^4$

$v = \ln(3x) \qquad v' = \frac{1}{x}$

$$\int x^3 \ln(3x)\,dx = \ln(3x) \cdot \frac{1}{4}x^4 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4}x^4 = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln(3x) - \frac{1}{16}x^4 + C}}$$

c) $\int \frac{2x-1}{x\,(x+3)^2}\,dx$

Grad des Zählerpolynoms $= 1$
Grad des Nennerpolynoms $= 3$
$\rightarrow$ echt gebrochen rationale Funktion

Nullstellen: $x_1 = 0$
$x_{2,3} = -3 \rightarrow$ mehrfache reelle Nullstelle

$$\int \frac{2x-1}{x\,(x+3)^2}\,dx = \int\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+3)^2}\right)dx$$

NR: $\frac{2x-1}{x\,(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2}{x} + \frac{Bx(x+3)}{(x+3)} + \frac{Cx}{(x+3)^2}$

Zählervergleich: $2x-1 = A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx$

$x_1 = 0 \qquad -1 = 9A \quad \rightarrow A = -\frac{1}{9}$

$x_{2,3} = -3 \qquad -7 = -3C \quad \rightarrow C = \frac{7}{3}$

$x^2: \qquad 0 = A + B \quad \rightarrow B = \frac{1}{9}$

$$\int\left(\frac{-1/9}{x} + \frac{7/3}{(x+3)} + \frac{1/9}{(x+3)^2}\right)dx = -\frac{1}{9}\ln|x| - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{x+3} + \frac{1}{9}\ln|x+3| + C$$

$$= \underline{\underline{-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{x+3} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| + C}}$$

6.3 Berechnen Sie die bestimmten Integrale mit linearer Substitution bzw. mit Partialbruchzerlegung

a) $J = \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{2}\right) dt$ b) $\int_1^2 \frac{2x-1}{(x+2)(x-4)} dx$

Lösung:

a) $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{2}\right) dt$

lineare Substitution:

$$z = \frac{2t}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2}{3} \rightarrow dt = \frac{3\,dz}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{2}\right) dt = \int_{t=0}^{t=\pi} \sin(z)\frac{3}{2} dz = \left[-\frac{3}{2}\cos(z)\right]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = -\frac{3}{4}\sqrt{3} \approx \underline{\underline{-1{,}299}}$$

b) $\int_1^2 \frac{2x-1}{(x+2)(x-4)} dx$

Grad des Zählerpolynoms $= 1$

Grad des Nennerpolynoms $= 2$

$\rightarrow$ echt gebrochen rationale Funktion

Nullstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 4$

$$\int_1^2 \frac{2x-1}{(x+2)(x-4)} dx = \int_1^2 \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{A(x-4)}{x+2} + \frac{B(x+2)}{x-4}\right) dx$$

Zählervergleich: $2x - 1 = A(x-4) + B(x+2)$

$x_1 = -2$ $\quad -5 = -6A \rightarrow A = \frac{5}{6}$

$x_2 = 4$ $\quad 7 = 6B \rightarrow B = \frac{7}{6}$

$$\int_1^2 \left(\frac{5/6}{x+2} + \frac{7/6}{x-4}\right) dx = \left[\frac{5}{6}\ln|x+2| + \frac{7}{6}\ln|x-4|\right]_1^2 = \frac{5}{6}\ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{7}{6}\ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx \underline{\underline{-0{,}2333}}$$

6.4 Berechnen Sie folgende Integrale ausführlich mit partieller Integration und Partialbruchzerlegung

a) $J = \int \frac{x}{(x-1)(x-4)^2} dx$ b) $J = \int_0^2 x \cdot e^{2x+1}\, dx$

Lösung:

a) $J = \int \frac{x}{(x-1)(x-4)^2} dx$

Grad des Zählerpolynoms $= 1$

Grad des Nennerpolynoms $= 3$

$\rightarrow$ echt gebrochen rationale Funktion

Nullstellen : $x_1 = 1$; $x_2 = 4 \rightarrow$ mehrfache reelle Nullstelle

$$J = \int \frac{x}{(x-1)(x-4)^2} dx = \int \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-4)} + \frac{C}{(x-4)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{A(x-4)^2 + B(x-1)(x-4) + C(x-1)}{(x-1)(x-4)^2} \right) dx$$

Zählervergleich : $x = A(x-4)^2 + B(x-1)(x-4) + C(x-1)$

$x_1 = 1 \quad 1 = 9A \quad \rightarrow A = \frac{1}{9}$

$x_2 = 4 \quad 4 = 3C \quad \rightarrow C = \frac{4}{3}$

$x^2 : \quad 0 = A + B \rightarrow B = -\frac{1}{9}$

$$\int \left(\frac{1/9}{(x-1)} + \frac{-1/9}{(x-4)} + \frac{4/3}{(x-4)^2} \right) dx = \frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln|x-4| - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-4} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x-4}\right| - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-4} + C}}$$

b) $J = \int_0^2 x \cdot e^{2x+1}\, dx$

partielle Integration: $\int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int v' \cdot u\, dx$

$u' = e^{2x+1} \qquad u = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$v = x \qquad v' = 1$

$$J = \int_0^2 x \cdot e^{2x+1}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} \cdot x - \int \frac{1}{2} e^{2x+1}$$

$$= \left[\frac{1}{2} x \cdot e^{2x+1} x - \frac{1}{4} e^{2x+1} \right]_0^2 = \frac{3}{4} e^5 + \frac{1}{4} e \approx \underline{\underline{111{,}989}}$$

6.5 Berechnen Sie die nachfolgenden Integrale durch Anwendung der partiellen Integration bzw. mit Hilfe der Partialbruchzerlegung. Alle dazu notwendigen Zwischenschritte müssen in logischer Reihenfolge deutlich erkennbar sein:

a) $\int \frac{x^4 + x^2}{(x+2)(x-4)^2} dx$ b) $\int x^2 \ln(5x)\, dx$

Lösung:

a) $\int \frac{x^4 + x^2}{(x+2)(x-4)^2} dx = \int \frac{x^4 + x^2}{x^3 - 6x^2 + 32} dx$

Grad des Zählerpolynoms = 4
Grad des Nennerpolynoms = 3
$\rightarrow$ unecht gebrochen rationale Funktion

Polynomdivision:

$$\left(x^4 + x^2\right) : \left(x^3 - 6x^2 + 32\right) = x + 6 + \frac{37x^2 - 32x - 192}{x^3 - 6x^2 + 32}$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^4 - 6x^3 + 32x\right) \\ \hline \quad 6x^3 - 32x + x^2 \\ \quad -\left(6x^3 - 36x^2 + 192\right) \\ \hline \qquad 37x^2 - 32x - 192 \end{array}$$

$$J_1 = \int (x+6)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 6x$$

$$J_2 = \int \left(\frac{37x^2 - 32x - 192}{(x+2)(x-4)^2} \right) dx = \int \left(\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-4)} + \frac{C}{(x-4)^2} \right) dx$$

Nullstellen : $x_1 = -2$; $x_2 = 4 \rightarrow$ mehrfache reelle Nullstelle

$$\int \left(\frac{37x^2 - 32x - 192}{(x+2)(x-4)^2} \right) dx = \int \left(\frac{A(x-4)^2 + B(x+2)(x-4) + C(x+2)}{(x+2)(x-4)^2} \right) dx$$

Zählervergleich : $37x^2 - 32x - 192 = A(x-4)^2 + B(x+2)(x-4) + C(x+2)$

$$x_1 = -2 \qquad 20 = 36A \rightarrow A = \frac{5}{9}$$

$$x_2 = 4 \qquad 272 = 6C \rightarrow C = \frac{136}{3}$$

$$x^2: \qquad 37 = A + B \rightarrow B = \frac{328}{9}$$

$$J_2 = \int \left(\frac{5/9}{(x+2)} + \frac{136/3}{(x-4)} + \frac{328/9}{(x-4)^2} \right) dx = \frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{136}{3}\ln|x-4| - \frac{328}{9} \cdot \frac{1}{x-4}$$

$$J = J_1 + J_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 + 6x\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{136}{3}\ln|x-4| - \frac{328}{9} \cdot \frac{1}{x-4} + C}}$$

b) $\int x^2 \ln(5x)\,dx$

partielle Integration : $\int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int v' \cdot u\, dx$

$$u' = x^2 \qquad u = \frac{1}{3}x^3$$

$$v = \ln(5x) \qquad v' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^2 \ln(5x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(5x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}x^3\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(5x) - \frac{1}{9}x^3 + C}}$$