## 4.1 Grundlagen Lokale Extremwerte und Sattelpunkte von Funktionen mehrerer Unabhängiger

Gegeben sei eine Funktion $z = f(x, y)$ von 2 unabhängigen Variablen x und y. Notwendig für die Existenz eines lokalen Extremwertes oder eines Sattelpunktes ist das Vorhandensein einer waagerechten Tangentialebene an dieser Stelle, was für die ersten partiellen Ableitungen bedeutet:

$$z_x = 0 \qquad (I_a)$$
$$z_y = 0 \qquad (I_b)$$

$(\text{beides notwendig!})$

Für einen lokalen Extremwert ist darüber hinaus noch erforderlich:

$$z_{xx} \cdot z_{yy} > z_{xy}{}^2 \qquad (II)$$

Die Bedingungen $(I_a),(I_b)$ und $(II)$ zusammen sind also hinreichend für einen lokalen Extrempunkt. Aus den Vorzeichen der zweiten partiellen Ableitungen folgt dann noch die Art des Extremwerts:

| | |
|---|---|
| lok. Minimum: | $z_{xx} > 0$ und $z_{yy} > 0$ |
| lok. Maximum: | $z_{xx} < 0$ und $z_{yy} < 0$ |

Ist Zusatzbedingung $(II)$ nicht erfüllt, aber $(I_a)$ und $(I_b)$, so ist dort ein Sattelpunkt.

Anmerkung: Für Funktionen von mehr als 2 unabhängige Variablen $x_1, \ldots x_n$

$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ lautet das notwendige Kriterium für lok. Extremwerte entsprechend:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

Es existieren auch hinreichende Kriterien, die aber aufwendiger sind und in der Lehrveranstaltung „Mathematik II“ nicht behandelt werden.