4. Thema: Extremwerte und Sattelpunkte von Funktionen mehrerer Variabler

4.1 Untersuchen Sie die Funktion $z = f(x,y) = 4x^2 - 31x + y^2 + 16x - 5xy + 7$ mittels notwendiger und hinreichender Kriterien auf die Existenz lokaler Extrempunkte und/oder Sattelpunkte und geben Sie diese ggf. an.

Lösung:

$$z_x = 8x - 31 - 5y$$
$$z_y = 2y + 16 - 5x$$
$$z_{xx} = 8$$
$$z_{yy} = 2$$
$$z_{xy} = -5$$

Notwendig für EW: $z_x = z_y = 0$

$z_x = 0$ <=> $8x - 5y = 31$ (I)

$z_y = 0$ <=> $z_x = 0$ (II)

2(I)+5(II): $-9x = -18$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

aus (II): $2y = 5x - 16 = 10 - 16$

$$2y = -6$$
$$\underline{\underline{y = -3}}$$

→ in $P(2;-3)$ könnte $z = f(x,y)$ lokale EW besitzen

$$z_{xx}(P) = 8 > 0$$
$$z_{yy}(P) = 2 > 0$$

→ wenn EW, dann lokales Minimum

Dazu muss aber auch noch das hinreichende Kriterium passen:

$$z_{xx} \cdot z_{yy} > z^2{}_{xy}$$
$$z_{xy}(P) = -5$$

→ $8 \cdot 2 > 25$ bzw. $16 > 25$ → falsche Aussage, hinreichendes Kriterium nicht erfüllt

z-Wert: $z = 16 - 62 + 9 - 48 + 30 + 7 = 16 - 64$

$$\underline{\underline{z = -48}}$$

Es existiert kein EW, sondern ein Sattelpunkt an $(x;y;z) = (2;-3;-48)$.

4.2 Gegeben ist die Funktion $z = f(x,y) = (x + 1)\ln(y-2)$

Untersuchen Sie die Funktion nach lokalen Extremwerten !

$$z_x = \ln(y-2) \qquad z_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3$$
$$z_y = \frac{x+1}{y-2} \qquad z_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$
$$z_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{xx}(-1;3) = 0$$
$$z_{yy} = -\frac{x+1}{(y-2)^2} \quad \Rightarrow \quad z_{yy}(-1;3) = 0$$
$$z_{xy} = \frac{1}{y-2} \quad \Rightarrow \quad z_{xy}(-1;3) = 1$$

$$\Rightarrow \quad (z_{xy})^2 > z_{yy}z_{xx} \quad \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt an } (-1;3)$$

4.3 Untersuchen Sie folgende Funktion auf Extrem- und Sattelpunkte.

$$z = f(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 5$$

Lösung:

$$z_x = 6x - 2\sqrt{y} - 8$$
$$z_y = -xy^{-\frac{1}{2}} + 1 = -\frac{x}{\sqrt{y}} + 1$$
$$z_{xx} = 6$$
$$z_{yy} = \frac{1}{2}xy^{-\frac{3}{2}} = \frac{x}{2\sqrt{y^3}}$$
$$z_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{y}}$$

Notwendig für EW: $z_x = z_y = 0$

$z_x = 0$ <=> $6x - 2\sqrt{y} = 8$ (I)

$z_y = 0$ <=> $x = \sqrt{y}$ (II)

(II) in (I): $6\sqrt{y} - 2\sqrt{y} = 8$

$4\sqrt{y} = 8$

$\sqrt{y} = 2 \rightarrow \underline{\underline{y = 4}}$

aus (II): $x = \sqrt{y} = 2$ → $\underline{\underline{x = 2}}$

→ in $P(2;4)$ könnte $z = f(x,y)$ lokale EW besitzen

$z_{xx}(P) = 6 > 0$

$z_{yy}(P) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (4)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} > 0$

→ wenn EW, dann lokales Minimum

Dazu muss aber auch noch das Zwischenkriterium passen:

$z_{xx} \cdot z_{yy} > z^2{}_{xy}$

$z_{xy}(P) = -\frac{1}{2}$

→ $6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$ → erfüllt

An $P(2;4)$ existiert ein lokales Minimum.

z-Wert dort: $z(P) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 - 8 \cdot 2 + 5$

$z = 12 - 8 + 4 - 16 + 5 = \underline{\underline{-3}}$

Im lokalen Minimum hat die Funktion den Wert $z = -3$.

4.4 Untersuchen Sie die Funktion $z = f(x,y) = x^3 - 12x + y^2 + 6y + 27$ mittels notwendiger Kriterien auf mögliche Extrempunkte.
Entscheiden Sie dann mittels weiterer Kriterien darüber, ob es sich um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

$z = x^3 - 12x + y^2 + 6y + 27$

$z_x = 3x^2 - 12$

$z_y = 2y + 6$

$z_{xx} = 6x$

$Z_{yy} = 2$

$z_{xy} = z_{yx} = 0$

Notwendig für lok. Extremwert (EW) oder Sattelpunkt (SP)

$z_x = 0 \Leftrightarrow \; 3x^2 - 12 = 0 \; \rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow x_1 = 2 \; ; \; x_2 = -2$

$z_y = 0 \Leftrightarrow \; 2y + 6 = 0 \; \rightarrow \; y_1 = -3$

Damit kommen prinzipiell nur 2 Punkte als EW oder SP in Frage:

$P_1(2;-3) \quad ; \quad P_2(-2;-3)$

Für beide ist dann das hinreichende Kriterium für EW zu testen:

$P_1: \quad 6 \cdot 2 \cdot 2 > 0 \;\; \rightarrow EW$

$P_2: \; 6 \cdot (-2) \cdot 2 < 0 \;\; \rightarrow SP$

Für P_1 ist nun noch die Frage nach der Art des lok. EW zu beantworten:

$z_{xx} = 6 \cdot 2 = 12 > 0$

$(z_{yy} = \quad 2 \quad > 0)$

➔ An P_1 liegt ein lok. Minimum vor!