5. Thema: Extremwerte mit Nebenbedingungen, Lagrange Multiplikatoren

5.1 Eine zylindrische Blechdose (Radius R, Höhe H) ohne Deckel habe ein Volumen von 1250ml. Berechnen Sie die Maße der Dose, so dass die notwendige Lötnaht möglichst kurz ist. (Gelötet wird entlang des kreisförmigen Umfangs der Grundfläche und einmal entlang der Mantellinie der Länge H).

- Formulieren Sie Zielfunktion und Nebenbedingung
- Berechnung durch Einsetzen der Nebenbedingung in die Zielfunktion
- Berechnung durch Lagrange-Multiplikatoren-Methode

Lösung:

a)

Zielfunktion: $L(R,H) = 2\pi R + H$

Nebenbedingung: $g(R,H) = \pi R^2 H - V = 0$

b)

Nebenbedingung nach H umstellen und in Zielfunktion einsetzen:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}$$

$$L = 2\pi R + \frac{V}{\pi R^2} = L(R)$$

Differenzieren der Gleichung:

$$\frac{dL}{dR} = 2\pi - \frac{2V}{\pi R^3} = 0$$

$$R^3 = \frac{V}{\pi^2} = \frac{1250\,cm^2}{\pi^2} = 126{,}65\,cm^3$$

$$R = \sqrt[3]{126{,}65\,cm^3}$$

$$R = \underline{\underline{5{,}022\,cm}}$$

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{1250\,cm^2}{\pi(5{,}022\,cm)^2}$$

$$H = \underline{\underline{15{,}777\,cm}}$$

$$\frac{d^2L}{dR^2} = \frac{6V}{\pi R^4} = \frac{6 \cdot 1250\,cm^2}{\pi(5{,}022\,cm)^4} = 3{,}75 > 0 \quad \rightarrow \text{lokales Minimum}$$

c)

$$F(R,H,\lambda) = 2\pi R + H + \lambda\left(\pi R^2 H - V\right)$$

$$F_R = 2\pi + 2\lambda\pi RH = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$F_H = 1 + \lambda\pi R^2 = 0 \qquad \text{(II)} \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\pi R^2} \quad \text{in (I) einsetzen}$$

$$F_\lambda = \pi R^2 H - V = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\rightarrow \quad 2\pi - \frac{2}{\pi R^2}\pi RH = 0$$

$$2\pi = \frac{2}{R}H$$

$$\underline{\underline{H = \pi R}}$$

$$V = \pi R^2 H = \pi R^2 \pi R = \pi^2 R^3$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{1250\,\text{cm}^2}{\pi^2}} = \underline{\underline{5{,}022\,\text{cm}}}$$

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{1250\,\text{cm}^2}{\pi(5{,}022\,\text{cm})^2}$$

$$H = \underline{\underline{15{,}777\,\text{cm}}}$$

5.2 Ein zylinderförmige Dose aus Blech soll ein Volumen von $V = 5000\text{cm}^3$ haben. Zu ihrer Herstellung wird zunächst ein rechteckiges Blech zur Mantelfläche zusammengebogen und entlang der Mantellinie zusammengelötet. Danach werden die kreisrunden Grund- und Deckflächen entlang des jeweiligen Kreisumfangs eingelötet.

a) Wie muss die Dose dimensioniert sein (Radius R und Höhe H), damit die Gesamtlänge L der gelöteten Linien minimal ist ?

b) Wie muss die Dose dimensioniert sein (Radius R und Höhe H), damit die Oberfläche und damit der Blechverbrauch minimal ist ?

a) Zielfunktion: $L = H + 4\pi R$

Nebenbedingung: $V = \pi R^2 H$

1.Weg: Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen

$$L = \frac{V}{\pi R^2} + 4\pi H = L(R)$$

$$\frac{dL}{dR} = -\frac{2V}{\pi R^3} + 4\pi = 0$$

$$4\pi^2 R^3 = 2V$$

$$R^3 = \frac{V}{2\pi^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{5000\,cm^3}{2\pi^2}} = \underline{\underline{6,327\,cm}}$$

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = \underline{\underline{39,75\,cm}}$$

Wegen $\frac{d^2L}{dR^2} = \frac{6V}{\pi R^4} > 0$

Ist es ein lokales Minimum, d.h. die gelötete Linie ist minimal mit

$$L = 39,75cm + 4\pi \cdot 6,327cm = \underline{\underline{119,26\,cm}}$$

2.Weg: Lagrange-Multiplikatoren

$$F = L + \lambda\left(\pi R^2 H - V\right)$$

$$F = H + 4\pi R + \lambda\left(\pi R^2 H - V\right)$$

$$F_H = 1 + \lambda\pi R^2 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$F_R = 4\pi + 2\lambda\pi RH = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$F_\lambda = \pi R^2 H - V = 0 \qquad \text{(III)}$$

aus (I) $\lambda = -\frac{1}{\pi R^2}$

in (II) $4\pi - \frac{2\pi RH}{\pi R^2} = 0$

$$4\pi R^2 = 2\pi RH$$

$$\underline{2\pi R = H}$$

$$V = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R^3$$
$$R^3 = \frac{V}{2\pi^2}$$

$\underline{R = 6{,}327cm}$ $\quad \rightarrow \underline{H = 2\pi R = 39{,}75cm}$

Verbale(logische) Begründung für Minimum von L:

Lässt man gedanklich die Grundfläche „schrumpfen“$(R \rightarrow 0)$, so muss $H \rightarrow \infty$ gehen, damit $H \rightarrow \infty$gehen, damit $V = 5000cm^3 = const$ bleiben kann. Lässt man stattdessen $H \rightarrow 0$gehen, so muss $R \rightarrow \infty$ für V=const. Das bedeutet in beiden Fällen$L \rightarrow \infty$. Da nur ein Extremwert für L gefunden wird, muss dieser ein Minimum sein.

b) Zielfunktion: $\quad A = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

Nebenbedingung: $\quad V = \pi R^2 H$

<u>1.Weg</u>: Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

$$\frac{dA}{dR} = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0$$
$$4\pi R^3 = 2V$$
$$R^3 = \frac{V}{2\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{5000cm^3}{2\pi}} = \underline{\underline{9{,}267cm}}$$

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{5000cm^3}{\pi \cdot (9{,}267cm)^2} = \underline{\underline{18{,}534cm}}$$

Es handelt sich tatsächlich um ein Minimum für A, denn:

$$\frac{d^2A}{dR^2} = 4\pi + \frac{4V}{R^3} > 0$$

2.Weg: Lagrange-Multiplikatoren

$$F = 2\pi R^2 + 2\pi RH + \lambda\left(\pi R^2 H - V\right)$$

$$F_R = 4\pi R + 2\pi H + \lambda 2\pi RH = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$F_H = 2\pi R + \lambda\pi R^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$F_\lambda = \pi R^2 H - V = 0 \qquad \text{(III)}$$

aus (II) $\lambda = -\frac{2\pi R}{\pi R^2} = -\frac{2}{R}$

in (I) $4\pi R + 2\pi H - \frac{2}{R} 2\pi RH = 0$

$$4\pi R + 2\pi H - 4\pi H = 0$$

$$\underline{2R = H}$$

$$V = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

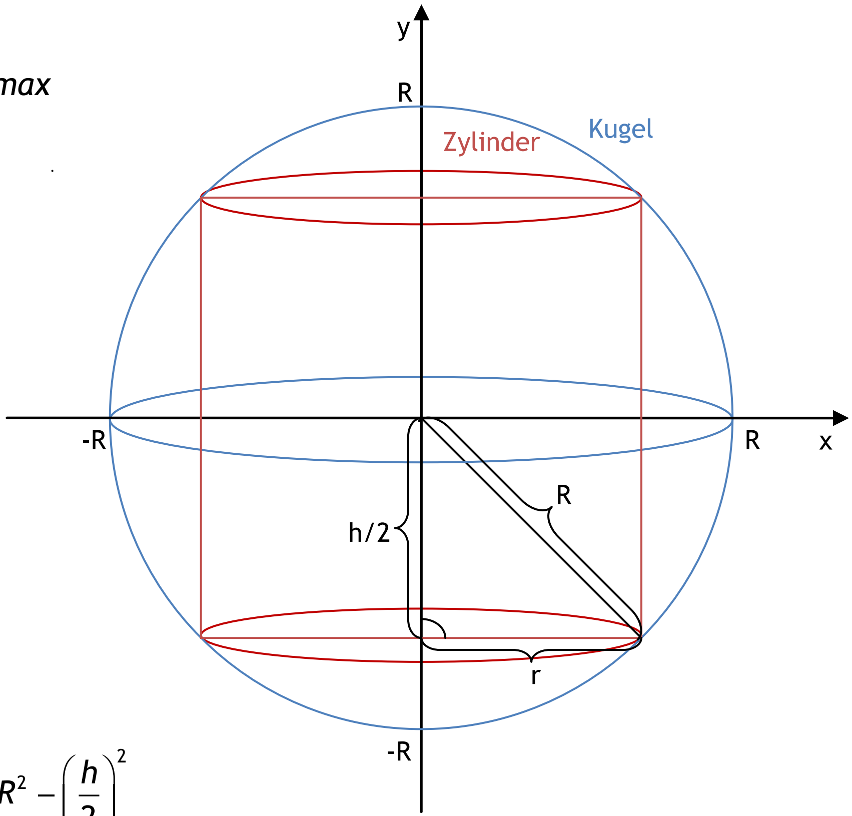
$$R^3 = \frac{V}{2\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$\underline{R = 9{,}267\text{cm}}$ $\rightarrow$ $\underline{H = 2R = 18{,}534\text{cm}}$

5.3 In eine Kugel mit dem Radius R soll ein Kreiszylinder [Kreiskegel] einbeschrieben werden. Bestimmen Sie das Verhältnis von Grundkreisradius und Höhe, wenn das Volumen des Zylinders [Kegels] ein Maximum sein soll!

a) Zylinder



$$ZF: \quad V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \rightarrow max$$

$$NB: \quad R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$aus\ NB \quad r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad in\ ZF$$

$$V_{Zylinder} = \pi\left(R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)h$$

$$V_{Zylinder} = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4}h^3 = f(h)$$

$$\frac{dV_{Zylinder}}{dh} = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0$$

$$\frac{3\pi}{4}h^2 = \pi R^2$$

$$\underline{h = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R} \quad in\ NB \quad r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r^2 = R^2 - \frac{\frac{4}{3} \cdot R^2}{2^2}$$

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{3} \cdot R^2$$

$$\underline{r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}}} \approx 0{,}707$$

$$\frac{d^2V_{Zylinder}}{dh^2} = 0 - \frac{3\pi}{2}h < 0 \quad \rightarrow \quad \text{max}$$

mit Lagrangen Multiplikatoren:

$$F = \pi \cdot r^2 \cdot h + \lambda \left(r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 - R^2 \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 2\pi r h + 2\lambda r = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = -\pi h$$

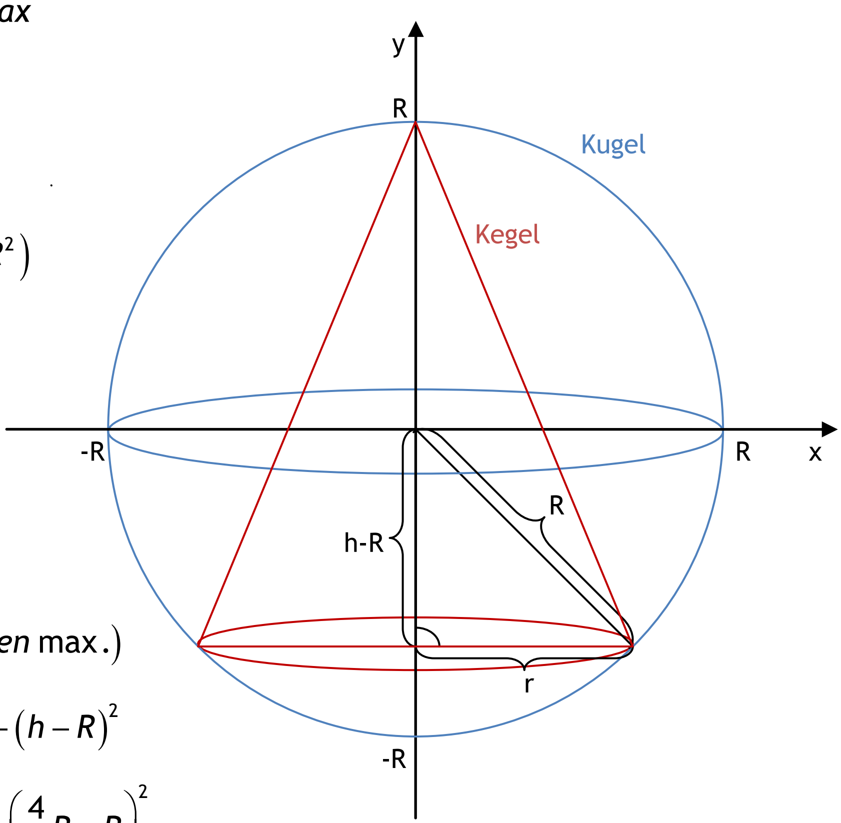
$$\frac{\partial F}{\partial h} = \pi r^2 + \frac{1}{2}\lambda h = 0 \qquad \Rightarrow \pi r^2 + \frac{1}{2}(-\pi h)h = 0 \qquad \Rightarrow r^2 = \frac{h^2}{2}$$

$$in\, NB: \quad R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2} = \frac{3h^2}{4} \quad \Rightarrow h = \sqrt{\frac{4}{3}}\, R \quad und \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$$

b) Kegel

$$ZF: \quad V_{Kegel} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h \quad \to max$$

$$NB: \quad R^2 = r^2 + (h-R)^2$$



$$aus\ NB \quad r^2 = R^2 - (h-R)^2$$

$$r^2 = R^2 - \left(h^2 - 2hR + R^2\right)$$

$$r^2 = 2hR - h^2 \quad in\ ZF$$

$$V_{Kegel} = \frac{\pi}{3}\left(2hR - h^2\right)h$$

$$V_{Kegel} = \frac{2\pi}{3}Rh^2 - \frac{\pi}{3}h^3 = f(h)$$

$$\frac{dV_{Kegel}}{dh} = \frac{4\pi}{3}Rh - \pi h^2 = 0$$

$$\frac{4\pi}{3}Rh = \pi h^2 \quad |:h \quad (h > 0\ \ wegen\ \max.)$$

$$\underline{h = \frac{4}{3}R} \quad in\ NB \quad r^2 = R^2 - (h-R)^2$$

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{4}{3}R - R\right)^2$$

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{9}R^2$$

$$\underline{r = \sqrt{\frac{8}{9}}R = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{3}R} \quad \to \quad \underline{\underline{\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}}} \approx 0{,}707$$

$$\frac{d^2V_{Kegel}}{dh^2} = \frac{4\pi}{3}R - 2\pi h = \frac{4\pi}{3}R - 2\pi\frac{4}{3}R < 0 \quad \to \quad \max$$

mit Lagrangen Multiplikatoren:

$$F = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h + \lambda\left(r^2 + h^2 - 2hR\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi \cdot r \cdot h + 2\lambda r = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}\pi h$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 + \lambda\left(2h - 2R\right) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{3}\pi h\left(2h - 2R\right) = 0 \,\Big|: \frac{1}{3}\pi$$

$$\Rightarrow r^2 = h\left(2h - 2R\right)$$

$$mit\, NB\, gleichgesetzt: \qquad \Rightarrow 2hR - h^2 = 2h^2 - 2hR \,\big|: h$$

$$\Rightarrow 4R = 3h$$

$$\Rightarrow \qquad h = \frac{4}{3}R \qquad und \qquad r = \frac{2}{3}\sqrt{2}\, R$$

5.4 Ein Körper bestehe aus einem Zylinder mit Grundfläche (Radius R, Höhe H), auf dem als Deckfläche eine Halbkugel aufgesetzt ist. Man berechne für ein vorgegebenes Volumen V = 1000 cm³ die Werte für R und H so, dass die Oberfläche des Körpers minimal wird!

mit Lagrangen Multiplikatoren:

$$F = 3\pi R^2 + 2\pi RH + \lambda\left(\pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3 - V\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial R} = 6\pi R + 2\pi H + \lambda\pi\left(2RH + 2R^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial H} = 2\pi R + \lambda\pi R^2 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{R}$$

$$in\ \frac{\partial F}{\partial R}:$$

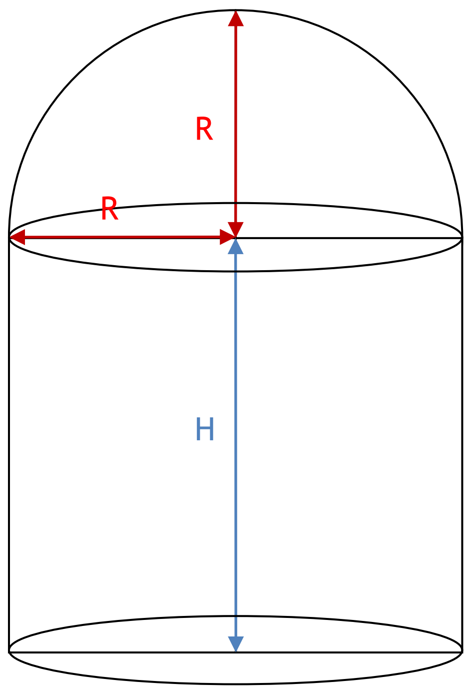
$$6\pi R + 2\pi H - \frac{2}{R}\pi\left(2RH + 2R^2\right) = 0 \,\big|: \pi$$

$$6R + 2H - 4H - 4R = 0$$

$$H = R$$

$$ZF: \quad A_O = A_{Halbkugel} + A_{Zyl.Mantel} + A_{Zyl.Boden} \quad \to \text{min}$$

$$NB: \quad V = V_{Zylinder} + V_{Halbkugel}$$



aus ZF $\quad A_O = 2\pi R^2 + 2\pi RH + \pi R^2$

$$A_O = \pi R(3R + 2H)$$

aus NB $\quad V = \pi R^2 H + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$

$$V = \pi R^2 H + \frac{2\pi}{3} R^3$$

$$H = \frac{V - \frac{2\pi}{3}R^3}{\pi R^2} = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R \quad \textit{in ZF}$$

$$A_O = \pi R\left(3R + 2\left(\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R\right)\right)$$

$$A_O = 3\pi R^2 + \frac{2V}{R} - \frac{4\pi}{3}R^2 = f(R)$$

$$\frac{\mathrm{d}A_O}{dR} = 6\pi R - \frac{2V}{R^2} - \frac{8\pi}{3}R = 0$$

$$\left(6\pi - \frac{8\pi}{3}\right)R = \frac{2V}{R^2}$$

$$\frac{5\pi}{3}R^3 = V$$

$$\underline{R = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}} \approx 5{,}759cm} \quad \textit{in NB}$$

$$H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R \approx \underline{5{,}759cm}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_O}{dR^2} = 6\pi + \frac{4V}{R^3} - \frac{8\pi}{3} \approx 31{,}41 > 0 \quad \to \quad \text{min}$$