1. Thema Taylorreihe

1.1. Entwickeln Sie die Funktion y = f(x) = $\frac{1}{\sqrt[5]{(1+x)^3}}$ an der Stelle x_0 = 0 in eine Taylorreihe bis zum Glied x^4 mit Hilfe der Binomischen Reihe !

Lösung

$$\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\binom{-3/5}{1} = -\underline{\underline{\frac{3}{5}}} \qquad \binom{-3/5}{2} = \frac{\left(-3/5\right)\left(-8/5\right)}{1\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{12}{25}}}$$

$$\binom{-3/5}{3} = \frac{\left(12/25\right)\left(-13/5\right)}{3} = -\underline{\underline{\frac{52}{125}}} \qquad \binom{-3/5}{4} = \frac{\left(-52/125\right)\left(-18/5\right)}{4} = \underline{\underline{\frac{234}{625}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{(1+x)^3}} \approx 1 - \frac{3}{5}x + \frac{12}{25}x^2 - \frac{52}{125}x^3 + \frac{234}{625}x^4$$

1.2 Entwickeln Sie die Funktion y = f(x) = $\sqrt{1+\sin(2x)}$ an der Stelle x_0 = 0 in eine Taylorreihe bis zum quadratischen Glied x^2 !

Lösung

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(1+\sin(2x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}\cos(2x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\left(1+\sin(2x)\right)}} \qquad f'(0) = \underline{\underline{1}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\cancel{2}}\left(1+\sin(2x)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \cancel{2}\cos(2x)\cdot\cos(2x) + \left(1+\sin(2x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-2\sin(2x)\right)$$

$$f''(x) = \frac{\left(\sin(x)+\cos(x)\right)^4}{\sqrt{\left(1+\sin(2x)\right)^3}} \qquad f''(0) = \underline{\underline{-1}}$$

$$\sqrt{1+\sin(2x)} \approx 1 + x - \frac{1}{2}x^2$$

1.3 Entwickeln Sie $y = f(x) = \ln(x + e^x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe (Mac Laurin-Reihe) bis zum Glied x^2 .

Lösung

$$y = \ln\left(x + e^x\right) \qquad y\,(0) = 0$$

$$y' = \frac{1}{x + e^x}\cdot\left(1 + e^x\right) \qquad y'(0) = 2$$

$$y'' = \frac{\left(x + e^x\right)e^x - \left(1 + e^x\right)^2}{\left(x + e^x\right)^2} \qquad y''(0) = -3$$

$$y(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2$$

1.4 Entwickeln Sie $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(1 + x^2\right)^3}}$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe bis zum Glied x^8 mit Hilfe der binomischen Reihe.

Lösung

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(1 + x^2\right)^3}} = \left(1 + x^2\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(1 + z\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$z = x^2 \qquad \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \qquad \binom{-3/4}{1} = -\frac{3}{4} \qquad \binom{-3/4}{2} = \frac{\left(-3/4\right)\left(-7/4\right)}{1\cdot 2} = \frac{21}{32}$$

$$\binom{-3/4}{3} = \frac{21}{32}\cdot\left(\frac{-11/4}{3}\right) = -\frac{77}{128} \qquad \binom{-3/4}{4} = -\frac{77}{128}\cdot\left(\frac{-15/4}{4}\right) = \frac{1155}{2048}$$

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{21}{32}x^4 - \frac{77}{128}x^6 + \frac{1155}{2048}x^8$$