## 4. Schwerpunkt: Komplexe Zahlen, Fundamentalsatz der Algebra

4.1 Man gebe die durch folgenden Ausdruck gegebene komplexe Zahl z in arithmetischer und exponentieller Form an!

$$\underline{z} = j + \frac{1+j}{3+j}$$

Lösung:

Nebenrechnung: $\frac{(1+j)(3-j)}{(3+j)(3-j)} = \frac{3-j+3j+1}{9+1} = \frac{4+2j}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j$

$\underline{z} = j + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}j$ arithmetische Form

Betrag von z: $|\underline{z}| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{\sqrt{40}}{5} = 1{,}2649$

Winkel $\varphi$ : $\arctan\left(\frac{6/5}{2/5}\right) = \arctan(3) = 71{,}56^\circ$

$\underline{z} = 1{,}2649 \cdot e^{71{,}56^\circ j}$ exponentielle Form

4.2 Berechnen sie die vierten Wurzeln von $\underline{z} = -3 + 4j$

Lösung: Betrag von $\underline{z}$: $|\underline{z}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Winkel: $\arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = -53{,}13^\circ + 180^\circ = 126{,}87^\circ$

$$w_0 = \sqrt[4]{5} \cdot e^{\frac{126{,}87^\circ}{4} j} = 1{,}5 \cdot e^{31{,}72^\circ j} = 1{,}28 + 0{,}79j$$

$$w_1 = 1{,}5 \cdot e^{\left(31{,}72^\circ + 1 \cdot \frac{360^\circ}{4}\right) j} = 1{,}5 \cdot e^{121{,}72^\circ j} = -0{,}79 + 1{,}28j$$

$$w_2 = 1{,}5 \cdot e^{\left(31{,}72^\circ + 2 \cdot \frac{360^\circ}{4}\right) j} = 1{,}5 \cdot e^{211{,}72^\circ j} = -1{,}28 - 0{,}79j$$

$$w_3 = 1{,}5 \cdot e^{\left(31{,}72^\circ + 3 \cdot \frac{360^\circ}{4}\right) j} = 1{,}5 \cdot e^{301{,}72^\circ j} = 0{,}79 - 1{,}28j$$

4.3 Berechnen Sie die Nullstellen folgender Polynome und geben Sie diese in der Produktform an: a) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 22x - 20$

b) $P(x) = x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 44x^2 + 40x - 16$

Lösung

a) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 22x - 20 = (x-1)(x+2)(x-3-j)(x-3+j)$

b) $P(x) = x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 44x^2 + 40x - 16 = (x-2)^3(x-1-j)(x-1+j)$

4.4 Gegeben sind die Zahlen $a = -3 + 4j$ und $b = \sqrt{2}\left(\cos(45^\circ) + j \cdot \sin(45^\circ)\right)$

a) Wandeln Sie a und b in die Exponentialform um !

b) Berechnen Sie den Wert von X ausführlich in der algebraischen Form

$$X = \frac{a}{b} + \frac{b+1}{a-1}$$

c) Berechnen Sie w aus $w^3 = 8b$

d) Geben Sie das Polynom in der Produktform an:
$P(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 13$

Lösung

a)

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi_{\underline{a}} = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + 180^\circ = -53{,}13^\circ + 180^\circ = 126{,}87^\circ$$

$$a = 5 \cdot e^{126{,}87^\circ j}$$

$$b = \sqrt{2} \cdot e^{45^\circ j}$$

b)

$$\text{Nebenrechnung: } b = \sqrt{2}\cos(45^\circ) + j \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ)$$

$$b = 1 + j$$

$$X = \frac{-3+4j}{1+j} + \frac{(1+j)+1}{(-3+4j)-1}$$

$$X = \frac{(-3+4j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} + \frac{(2+j)(-4-4j)}{(-4+4j)(-4-4j)}$$

$$X = \frac{-3+3j+4j-4j^2}{1-j^2} + \frac{-8-8j-4j-4j^2}{16-16j^2}$$

$$X = \frac{1+7j}{2} + \frac{-4-12j}{32} = \frac{1}{2} - \frac{4}{32} + \left(\frac{7}{2} - \frac{12}{32}\right)j = \frac{3}{8} + \frac{25}{8}j$$

c)

$$w = \sqrt[3]{8\left(\sqrt{2} \cdot e^{45^\circ j}\right)}$$

$$w = \sqrt[3]{8\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} j}$$

$$w_0 = 2,2449 \cdot e^{15^\circ j} \quad \text{mit } k = 0$$

$$w_1 = 2,2449 \cdot e^{125^\circ j} \quad \text{mit } k = 1$$

$$w_2 = 2,2449 \cdot e^{255^\circ j} \quad \text{mit } k = 2$$

d)

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 13$

mit $x_1 = 1$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - 5x^2 + 17x - 13\right) : (x - 1) = x^2 - 4x + 13 \\
\underline{-\left(x^3 - x^2\right)} \\
\quad \left(-4x^2 + 17x - 13\right) \\
\quad \underline{-\left(-4x^2 + 4x\right)} \\
\qquad \left(13x - 13\right) \\
\qquad \underline{-\left(13x - 13\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$P(x) = (x - 1)\left(x^2 - 4x + 13\right)$

$0 = \left(x^2 - 4x + 13\right)$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3j$

$P(x) = (x - 1)(x - 2 - 3j)(x - 2 + 3j)$

4.5 Gegeben sind: a = 3 - 2j ; b = -2 + 5j

a) Geben Sie a und b sowie die zu a und b konjugiert komplexen Zahlen in Exponentialform an
(Ausführliche Berechnung von Betrag und Winkel!)

b) Berechnen Sie die Ausdrücke 4a-b und a/b ! Geben Sie die Ergebnisse in algebraischer und exponentieller Form an!

c) Geben Sie die dritten Wurzeln von b in Exponentialform an und skizzieren Sie die Lösungen als Zeiger in der komplexen Zahlenebene

d) Für welche Zahl c gilt: 4a - 3c = b ?

e) Geben Sie ein Polynom 3. Grades für eine Variable z an, dessen Nullstellen z1 = a, z2 = b und z3 = 2 sind !
(Mit obigen Werten für a uns b !)

f) Berechnen Sie unten stehenden Ausdruck A und geben Sie das Ergebnis in algebraischer und exponentieller Form an:

g) Für welche komplexe Zahl x ist die folgende Determinante D = 1 ?

Die Zahl x ist wiederum in Exponentialform und in algebraischer Form zu schreiben !

$$A = \frac{j + (2j - 6)(3 + 4j)}{j - 1} \qquad D = \begin{vmatrix} j + 1 & 4 + 5j \\ x & j - 1 \end{vmatrix}$$

Lösung

a)

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6056$$

$$\varphi_{\underline{a}} = \arctan\left(\frac{-2}{3}\right) = -33{,}69^\circ$$

$$a = \sqrt{13} \cdot e^{-33{,}69j}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}3852$$

$$\varphi_{\underline{b}} = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) + 180^\circ = 68{,}20 + 180^\circ = 248{,}20^\circ$$

$$b = \sqrt{29} \cdot e^{248{,}19^\circ j}$$

b)

$$u = 4a - b = 4(3 - 2j) - (-2 + 5j) = 12 - 8j + 2 - 5j = 14 - 13j$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{14^2 + 13^2} = \sqrt{365} \approx 19{,}1050$$

$$\varphi_{\underline{u}} = \arctan\left(\frac{-13}{14}\right) = -42{,}88^\circ$$

$$u = \sqrt{365} \cdot e^{-42{,}88^\circ j}$$

$$v = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{13} \cdot e^{-33{,}69^\circ j}}{\sqrt{29} \cdot e^{248{,}19^\circ j}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}} \cdot e^{(-33{,}69^\circ - 248{,}19^\circ)j} \approx 0{,}6695 \cdot e^{-281{,}88^\circ j}$$

$$v = 0{,}6695 \cdot \left(\cos(-281{,}88^\circ) + j \cdot \sin(-281{,}88^\circ)\right) = 0{,}1378 + 0{,}6552j$$

c)

$$\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\sqrt{29}} \cdot e^{\frac{248{,}19^\circ + k360^\circ}{3} j}$$

$$w_0 = 1{,}7528 \cdot e^{82{,}73^\circ j} \quad \text{mit } k = 0$$

$$w_1 = 1{,}7528 \cdot e^{202{,}73^\circ j} \quad \text{mit } k = 1$$

$$w_2 = 1{,}7528 \cdot e^{322{,}73^\circ j} \quad \text{mit } k = 2$$

d)

$$4a - 3c = b$$
$$3c = 4a - b$$
$$c = \frac{1}{3}\left(4a - b\right)$$
$$c = \frac{1}{3}\left(4\left(3 - 2j\right) - \left(-2 + 5j\right)\right)$$
$$c = \frac{1}{3}\left(12 - 8j + 2 - 5j\right)$$
$$c = \frac{1}{3}\left(14 - 13j\right)$$
$$c = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}j$$

e)

$$P\left(z\right) = \left(z - 3 + 2j\right)\left(z + 2 - 5j\right)\left(z - 2\right)$$

f)

$$A = \frac{j + (2j - 6)(3 + 4j)}{j - 1}$$
$$A = \frac{j + (6j + 8j^2 - 18 - 24j)(-j - 1)}{\left(j - 1\right)\left(-j - 1\right)}$$
$$A = \frac{j + (-26 - 18j)(-j - 1)}{1 + 1}$$
$$A = \frac{j + (26j + 26 + 18j^2 + 18j)}{2}$$
$$A = \frac{8 + 45j}{2} = 4 + 22{,}5j$$

$$\left|\underline{A}\right| = \sqrt{4^2 + 22{,}5^2} \approx 22{,}8528$$
$$\varphi_{\underline{A}} = \arctan\left(\frac{22{,}5}{4}\right) = 79{,}92^\circ$$
$$A = 22{,}8528 \cdot e^{79{,}92^\circ j}$$

g)

$$D = \begin{vmatrix} j+1 & 4+5j \\ x & j-1 \end{vmatrix} = 1$$

$$1 = (j+1)(j-1) - (4+5j)x$$

$$1 = (j^2 - j + j - 1) - (4+5j)x$$

$$1 = -2 - (4+5j)x$$

$$3 = -(4+5j)x$$

$$x = \frac{-3}{4+5j} = \frac{-3(4-5j)}{(4+5j)(4-5j)} = \frac{-12+15j}{16+25} = -\frac{12}{41} + \frac{15}{41}j$$

$$|\underline{x}| = \sqrt{\left(\frac{12}{41}\right)^2 + \left(\frac{15}{41}\right)^2} \approx 0,4685$$

$$\varphi_{\underline{x}} = \arctan\left(\frac{15}{-12}\right) + 180^\circ = 51,34^\circ + 180^\circ = 231,34^\circ$$

$$x = 0,4685 \cdot e^{231,34^\circ j}$$

4.6 Geben Sie ein Polynom in Produkt- und Summenform mit den Nullstellen an:

Nutzen Sie die binomischen Formeln auch für die komplexen Nullstellen aus.

a) $x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 5;\ x_4 = -5$

b) $x_1 = x_2 = x_3 = 2$

c) $x_1 = 2 + 3j;\ x_2 = 2 - 3j;\ x_3 = 0$

d) $x_1 = 3 + j;\ x_2 = 3 - j;\ x_3 = -1 + 2j;\ x_4 = -1 - 2j;$

Lösung

a) $x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 5;\ x_4 = -5$

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-5)(x+5) = (x^2-4)(x^2-25)$$

$$P(x) = x^4 - 29x^2 + 100$$

b) $x_1 = x_2 = x_3 = 2$

$$P(x) = (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

c) $x_1 = 2 + 3j;\ x_2 = 2 - 3j;\ x_3 = 0$

$$P(x) = (x - 2 - 3j)(x - 2 + 3j)\,x = \left((x-2)^2 + 9\right)x = \left(x^2 - 4x + 13\right)x$$

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$$

d) $x_1 = 3 + j;\ x_2 = 3 - j;\ x_3 = -1 + 2j;\ x_4 = -1 - 2j;$

$$P(x) = (x - 3 - j)(x - 3 + j)(x + 1 - 2j)(x + 1 + 2j)$$

$$P(x) = \left((x-3)^2 + 1\right)\left((x+1)^2 + 4\right) = \left(x^2 - 6x + 10\right)\left(x^2 + 2x + 5\right)$$

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 10x + 50$$

4.7 Bestimmen Sie die komplexen Lösungen z:

a) $\underline{z} = \dfrac{1 + 2j}{2 - j}$  b) $\underline{z} = (-2 + 2j)^{\frac{1}{3}}$

Angabe in algebraischer und exponentieller Form!

Lösung

a) Erweitern mit konjugiert komplexem Nenner:

$$\underline{z} = \frac{(1+2j)\,(2+j)}{(2-j)\,(2+j)} = \frac{2 + j + 4j - 2}{4 + 1} = \frac{5j}{5} = j$$ (Angabe in algebraischer Form)

durch das Bestimmen des Betrags von z und dem Winkel $\varphi$ erhält man die exponentielle Form:

$|\underline{z}| = 1$  $\varphi = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$

$\underline{z} = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}j}$ (Angabe in exponentieller Form)

b) $\underline{z} = \sqrt[3]{-2 + 2j}$

Betrag von Ausgangswert x:

$x = -2 + 2j \quad \Rightarrow \quad |x| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Argument von x: $\varphi = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) + \pi = \frac{3}{4}\pi$

$$x = -2 + 2j = 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi j} \qquad \Rightarrow \qquad z = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

Angabe in exponentieller Form:

$$\underline{z_0} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}j} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}$$

$$\underline{z_1} = \sqrt{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)j} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{11}{12}\pi j}$$

$$\underline{z_2} = \sqrt{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)j} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{19}{12}\pi j}$$

Angabe in algebraischer Form (über trigonometrische Form berechnet):

$$\underline{z_0} = 1 + j$$

$$\underline{z_1} = -1,366 + 0,366j$$

$$\underline{z_2} = 0,366 - 1,366j$$