3. Schwerpunkt: Vektorrechnung

3.1 Gegeben sind die 3 Punkte A(0, 0, 0), B(1, 2, -2) und C(0, -3, 4)

a) Bestimmen Sie vom Dreieck ABC den Umfang, die Innenwinkel und den Flächeninhalt !

b) Geben Sie die Ebene E, welche alle drei Punkte A, B, C enthält, in Vektordarstellung und als allgemeine Ebenengleichung an.

c) Geben Sie die Gleichung der Geraden g in Vektorform an, welche senkrecht zu E durch den Koordinatenursprung verläuft.

Lösung

a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{62}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$U = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| = 3 + \sqrt{62} + 5 = \underline{\underline{15{,}87LE}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}{3 \cdot 5} = \frac{0 - 6 - 8}{15} = -\frac{14}{15} \quad \rightarrow \alpha = \underline{\underline{158{,}96^\circ}}$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}}{3 \cdot \sqrt{62}} = \frac{1 + 10 + 12}{3 \cdot \sqrt{62}} = 0{,}9737 \quad \rightarrow \beta = \underline{\underline{13{,}18^\circ}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{62} \cdot 5} = \frac{0 + 15 + 24}{\sqrt{62} \cdot 5} = 0{,}9906 \quad \rightarrow \gamma = \underline{\underline{7{,}86^\circ}}$$

$$\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8-6 \\ 0-4 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]\right| = 2^2 + (-4)^2 + (-3)^2 = \sqrt{29}$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{29} \approx \underline{\underline{2{,}69FE}}$$

b) Vektordarstellung:

$$E: \vec{r} = \vec{r}_A + s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

allgemeine Ebenengleichung:

$$\begin{array}{lcrcrl} x & = & s & & & \text{(I)} \\ y & = & 2s & - & 3t & \text{(II)} \\ z & = & -2s & + & 4t & \text{(III)} \\ \hline y & = & 2s & - & 3t & \text{(II)} \quad |\cdot 4 \\ z & = & -2s & + & 4t & \text{(III)} \quad |\cdot 3 \\ \hline 4y + 3z & = & 2x & & & \end{array}$$

$$\underline{\underline{0 = 2x - 4y - 3z}}$$

c) Die Komponenten eines Vektors senkrecht zu E können direkt aus der allgemeinen Ebenengleichung entommen werden:

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

3.2 Welches Volumen hat der Körper, der durch die 5 Punkte O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,4) und D(3,4,5) begrenzt wird ?

Lösung

Es sind zwei unregelmäßige Tetraeder mit gemeinsamer Fläche ABC.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right|$$

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

$$V_1 = \frac{1}{6} \cdot |24| = \underline{4VE}$$

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right]\right|$$

$$\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -5 \\ -3 & -1 & -5 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 60 - 60 - (-15 - 12 - 20) = -74$$

$$V_2 = \frac{1}{6} \cdot |-74| = \frac{37}{3} = \underline{12\frac{1}{3}VE}$$

$$V_{Körper} = V_1 + V_2 = 12\frac{1}{3}VE + 4VE = \underline{\underline{16\frac{1}{3}VE}}$$

3.3 Von dem Tetraeder OABC sind die beiden Punkte O(0; 0; 0) und A(1; 2; 3) bekannt. Außerdem sind die folgende Verbindungsvektoren gegeben:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B und C .

b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders OABC .

c) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, die durch O und A verläuft.

Lösung

a)

$$\vec{B} = \overrightarrow{AB} + \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$B\left(0; -2; 4 \right)$$

$$\vec{C} = \overrightarrow{BC} + \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C\left(8; 5; 5 \right)$$

b)

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \right]\right|$$

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 8 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 112 + 15 - 35 - 10 = 82$$

$$V = \frac{1}{6}\left|82\right| = \underline{\underline{13,\bar{6}\,\mathrm{VE}}}$$

c)

$$g:\ \vec{r} = \vec{r}_0 + s \cdot \vec{A}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.4 Gegeben sind die Punkte P(-2; 0; 0) , Q(0; 4; 0) und R(0; 0; 7)

a) Geben Sie die Gleichung der Ebene E, welche die Punkte P, Q und R enthält, in der Hesseschen Normalform an.

b) Welchen Abstand hat E vom Koordinatenursprung

Lösung

a)

$$E: \vec{r} = \vec{r}_P + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 28 - 0 \\ 0 - 14 \\ 0 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{28^2 + (-14)^2 + (-8)^2} = \sqrt{1044}$$

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_0} = -p$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{\sqrt{1044}} \begin{pmatrix} 28 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix} = -\frac{56 + 0 + 0}{\sqrt{1044}} = -\frac{56}{\sqrt{1044}} = -p \mathrel{\hat{=}} d(\text{Abstand})$$

$$\underline{\underline{E: \vec{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1044}} \begin{pmatrix} 28 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix} = -\frac{56}{\sqrt{1044}}}}$$

b)

$$d = \left| -\frac{56}{\sqrt{1044}} \right| \approx \underline{\underline{1{,}733 LE}}$$