2. Lineare Gleichungssysteme (ohne Matrizen)

2.1 Lösen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus und der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 4 & (I) \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 9 & (II) \\ x & - & y & + & 2z & = & -3 & (III) \end{array}$$

Lösung: Gauß:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 4 & (I) \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 9 & (II) \\ x & - & y & + & 2z & = & -3 & (III) \\ \hline \end{array}$$

$-1 \cdot (III) + (I)$: $\quad 2y - z = 7 \quad (IV)$

$-2 \cdot (III) + (II)$: $\quad 5y = 15 \rightarrow \underline{\underline{y = 3}}$

aus (IV) : $\quad 6 - z = 7 \rightarrow \underline{\underline{z = -1}}$

aus (I) : $\quad x + 3 - 1 = 4 \rightarrow \underline{\underline{x = 2}}$

Cramersche Regel:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 2 - 3 - 4 + 4 = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 12 - 9 + 9 - 18 + 16 = 10$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 16 - 6 - 9 - 16 + 12 = 15$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 - 8 - 12 + 6 + 9 = -5$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 2; \qquad y = \frac{D_y}{D} = 3; \qquad z = \frac{D_z}{D} = -1$$

2.2 Man löse mit dem Gauß'schen Algorithmus und der Cramerschen Regel:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 4x & - & 5y & - & 7z & = & 0 & (I) \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 & (II) \\ 7x & + & y & - & z & = & 0 & (III) \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 7x & - & y & + & 5z & = & 1 & (I) \\ x & + & 3y & - & z & = & 7 & (II) \\ 15x & + & y & + & 9z & = & 2 & (III) \end{array}$$

Lösung: b) Gauß:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 7x & - & y & + & 5z & = & 1 & (I) \\ x & + & 3y & - & z & = & 7 & (II) \\ 15x & + & y & + & 9z & = & 2 & (III) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrl} 3\cdot(I)+(II): & 22x & + & 14z & = & 10 & (IV) \\ (I)+(III): & 22x & + & 14z & = & 2 & (V) \end{array}$$

$$-1\cdot(IV)+(V): \quad 0 = 8 \quad \text{Widerspruch}$$

$$L = \{\ \} = \emptyset$$

Cramersche Regel:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 15 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 189 + 15 + 5 - 225 + 9 + 7 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 7 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 27 + 2 + 35 - 30 + 63 + 1 = 98$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \\ 15 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 441 - 15 + 10 - 9 + 14 - 525 = -84$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 15 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 42 - 105 + 1 - 45 + 2 - 49 = -154$$

$$x = \frac{D_x}{0} = \text{n.d.}; \quad y = \frac{D_y}{0} = \text{n.d.}; \quad z = \frac{D_z}{0} = \text{n.d.} \rightarrow \underline{\underline{L = \{\ \} = \emptyset}}$$

a) Gauß:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
4x & - & 5y & - & 7z & = & 0 & (\mathrm{I}) \\
x & + & 2y & + & 2z & = & 0 & (\mathrm{II}) \\
7x & + & y & - & z & = & 0 & (\mathrm{III})
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrl}
-4\cdot(\mathrm{II})+(\mathrm{I}): & -13y & - & 15z & = & 0 & (\mathrm{IV}) \\
-7\cdot(\mathrm{II})+(\mathrm{III}): & -13y & - & 15z & = & 0 & (\mathrm{V})
\end{array}$$

$$-1\cdot(\mathrm{IV})+(\mathrm{V}): \quad 0 = 0 \quad \text{wahre Aussage } \forall\,(x,y,z)$$

frei wählbare Variable: z.B. $z \in \mathbb{R}$

aus(IV): $-13y = 15z$

$$y = -\frac{15}{13}z$$

aus(II): $x + 2\left(-\frac{15}{13}z\right) + 2z = 0$

$$x = \frac{4}{13}z$$

$$L = \left\{(x;y;z) = \left(\frac{4}{13}z; -\frac{15}{13}z; z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$$

Cramersche Regel:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -5 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 70 - 7 + 98 - 5 - 8 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

eine Spalte = 0 → Determinante = 0

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \qquad D_z = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$x, y, z = \frac{0}{0}$ → unendlich viele Lösungen, Berechnung siehe Gauß

2.3 Lösen sie mit dem Gauß'schen Verfahren und der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{ccccccccccl} 2x & & & & & - & u & = & 0 & & (I) \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 6 & & (II) \\ 2x & + & 2y & + & 4z & & & = & 8 & & (III) \\ x & - & y & - & 2z & - & 2u & = & -6 & & (IV) \end{array}$$

Lösung: Gauß:

$$\begin{array}{ccccccccccl} 2x & & & & & - & u & = & 0 & & (I) \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 6 & & (II) \\ 2x & + & 2y & + & 4z & & & = & 8 & & (III) \\ x & - & y & - & 2z & - & 2u & = & -6 & & (IV) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccl} (I)+(II): & 3x & + & y & + & 2z & = & 6 & & (V) \\ 2\cdot(II)+(IV): & 3x & + & y & + & 2z & = & 6 & & (VI) \\ (III): & 2x & + & 2y & + & 4z & = & 8 & & (III) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} (V)+(VI): & 0 & = & 0 \\ 2\cdot(II)+(IV): & -4x & = & -4 \end{array}$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

$$\text{aus}(I): \quad 2x - u = 0$$

$$2x = u$$

$$\underline{\underline{u = 2}}$$

$$\text{aus}(II): \quad x + y + 2z + u = 6$$

$$3 + y + 2z = 6$$

$$\underline{\underline{y = 3 - 2z}}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{ (x;y;z;u) \,\middle|\, x = 1;\ y = 3 - 2z;\ z \in \mathbb{R};\ u = 2 \right\}}}$$

Cramersche Regel:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D = 2\cdot(-8 + 0 - 4 + 4 + 8 + 0) - 4 + 4 - 4 - 4 + 4 + 4 = \underline{\underline{0}}$$

2.4 Aufgabe mit Lösung:

Untersuchen Sie folgende Aussagen über Gleichungssysteme (GS). Kreuzen Sie die jeweils richtigen Aussagen an. (Es können auch mehrere gleichzeitig richtig sein)

a) Gegeben ist ein lineares GS mit 3 Gleichungen für 5 Variable.

- o Dieses GS ist auf jeden Fall unlösbar.
- o Dieses GS hat genau eine Lösung.
- ⊗ Dieses GS ist entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

b) Gegeben ist ein lineares homogenes GS. Von diesem lässt sich die Koeffizientendeterminante D berechnen. Sie hat den Wert D=0.

- ⊗ Das GS hat genauso viele Gleichungen wie Variable.
- o Das GS kann unlösbar sein.
- o Das GS kann nur die triviale Lösung besitzen.
- ⊗ Das GS besitzt auf jeden Fall unendlich viele Lösungen.

c) Gegeben ist ein lineares GS. Von diesem lässt sich die Koeffizienten-determinante D berechnen. Sie hat den Wert D=-5.

- o Das GS kann nicht mit dem Gauß'schen Verfahren gelöst werden.
- o Das GS ist unlösbar.
- ⊗ Das GS lässt sich mit der Cramerschen Regel lösen.
- ⊗ Das GS lässt sich mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix lösen.