## 1. Schwerpunkt: Matrizenrechnung

1.1 Untersuchen Sie, für welche Werte p die Matrix $C = A \cdot B$ eine inverse Matrix besitzt!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$C = A \cdot B$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 4+2p \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 4+2p \end{vmatrix} = 8 + 4p - 22 = 4p - 14 \qquad D \neq 0 \rightarrow 4p - 14 \neq 0$$

$$4p \neq 14$$

$$p \neq \frac{7}{2}$$

1.2 Man gebe das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcl} x + y = a & & (I) \\ x - y = b & & (II) \end{array}$$

In Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix A an!
Man löse es mit dem Gauß-Algorithmus nach x und y auf und gebe das Ergebnis ebenfalls in Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix B an!
Zeigen Sie, dass A und B zueinander inverse Matrizen sind!
Für welche Wahl der Konstanten a, b ist das gegebene Gleichungssystem eindeutig lösbar, unlösbar bzw. besitzt unendlich viel Lösungen?

Lösung:

Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

nach den Variablen x und y auflösen:

(I)+(II): $2x = a + b$

(I)-(II): $2y = a - b$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$$y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix B:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Zeigen, dass A und B zueinander inverse Matrizen sind:

$$B = A^{-1}$$

$$A \cdot B = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich die Einheitsmatrix, somit sind A und B zueinander inverse Matrizen.

Stets eindeutig lösbar für beliebige a, b $\in \mathbb{R}$

1.3 Gegeben sind die Matrizen A, B, C mit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ p & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Matrizen A, B, $B^T$ und C !

b) Berechnen Sie die Produkte AB und $B^T A^T$ !

c) Welche Matrix X erfüllt die Gleichung $2A + X = 4C$ ?

Lösung

a) $\text{Typ } A = (3;3) \quad \text{Typ } B = (3;2) \quad \text{Typ } B^T = (2;3) \quad \text{Typ } C = (3;3)$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p+1 & -3 \\ p^2+7 & 4 \\ p & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 2p+1 & p^2+7 & p \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

c)

$$2A + X = 4C$$

$$X = 4C - 2A$$

$$X = 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ p & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 16 & -4 & -8 \\ 4p & 12 & 20 \\ -12 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2p & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -6 \\ 2p & 8 & 14 \\ -14 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1.4. Stellen Sie die nachfolgende Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

nach dem Lösungsvektor $\begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}$ um

und bestimmen Sie die Werte von a und b mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix.

Lösung

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{C} \quad \left| \mathrm{A}^{-1} \cdot \right.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{-1} \cdot (\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) &= \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{C} \\ (\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A}) \cdot \mathrm{B} &= \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{C} \\ \mathrm{I} \cdot \mathrm{B} &= \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{C} \\ \mathrm{B} &= \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{C} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{M}|\mathrm{I}) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 5 \end{array} \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc} 4 & -10 & 2 & 0 \\ 15 & -10 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} -\mathrm{Z2} \\ \phantom{x} \end{array} \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 15 & -10 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \phantom{x} \\ :5 \end{array} \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \phantom{x} \\ +\frac{3}{11}\mathrm{Z1} \end{array} \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 6/11 & -4/11 \end{array} \right) \begin{array}{l} :(-11) \\ :(-2) \end{array} \end{aligned}$$

$$\left(I \middle| M^{-1}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

1.5 Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & = & -7 & & (I) \\ 4x & - & y & = & 25 & & (II) \end{array}$$

a) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenform.

b) Stellen Sie die Matrixgleichung nach dem Spaltenvektor der gesuchten Variablen um, und bestimmen Sie die Werte von x und y mit Hilfe der inversen Matrix.

(Die inverse Matrix kann mit dem Gauss-Jordan-Verfahren oder auch über Adjunkten erfolgen – in jedem Fall ist ihre Berechnung ausführlich durchzuführen !)

Lösung – mit dem Gauss-Jordan-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C \quad \big| A^{-1} \cdot$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot B) &= A^{-1} \cdot C \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ I \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ B &= A^{-1} \cdot C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\left(M|I\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) + 3Z2$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) - \frac{2}{7}Z1$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \begin{array}{l} :14 \\ :(-1) \end{array}$$

$$\left(I|M^{-1}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{34}{7} \\ -\frac{39}{7} \end{pmatrix}}}$$

1.6 Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit der inversen Matrix

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & & & = & 1 & & (I) \\ x & - & 3y & + & 4z & = & 3 & & (II) \\ x & + & y & + & z & = & 2 & & (III) \end{array}$$

Die inverse Matrix ist ausführlich mit dem Gauss-Jordan-Verfahren zu berechnen !

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C \quad \left| A^{-1} \cdot \right.$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot B) &= A^{-1} \cdot C \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ I \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ B &= A^{-1} \cdot C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -Z3 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -Z1 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3Z3 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2Z2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) + Z2$$

$$\left(I \middle| M^{-1}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -8 \\ -3 & -1 & 4 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$