1 Aufgabe

Bei welcher dieser Relationen handelt es sich um eine Abbildung? Begründung.

a) $R = \{(1,2), (2,1), (5,4), (5,6)\}$

b) $R = \{(1,2), (3,2), (4,2)\}$

c) $R = \{(-7,1), (-3,4), (-1,0.5), (0,0), (3,5), (2,4)\}$

d) $R = \{(-7,1), (-2,2), (-1,0.5), (0,0), (3,5), (-2,5)\}$

2 Aufgabe

Bei welcher dieser Relationen handelt es sich um eine Abbildung? Begründung.

a) $R_1 = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$

b) $R_2 = \{(x,y) \mid y = 3x + 4\}$

c) $R_3 = \{(x,y) \mid y \leq 0\}$

d) $R_4 = \{(x,y) \mid y = -\frac{1}{3}x - 4\}$

3 Aufgabe

a) Liegt bei R_2 Eineindeutigkeit vor?

b) Beschreiben Sie die Umkehrabbildung als $f(y)$ von R_2!

c) Liegt bei R_4 bei Eineindeutigkeit vor?

d) Beschreiben Sie die Umkehrabbildung als $f(y)$ von R_4!

4 Aufgabe

Liegt in folgenden Relationen Eineindeutigkeit vor?

a) $R_5 = \{(x,y) \mid (y = 3x \ \wedge \ x \geq 0) \vee (y = -2x \ \wedge \ x < 0)\}$

b) Schränken Sie den Definitionsbereich von R_5 so ein, dass Eineindeutigkeit vorliegt!

c) $R_6 = \{(x,y) \mid (y = -\frac{1}{5}x + 2 \ \wedge \ x \geq 0) \vee (y = \sqrt{2}x + 3 \ \wedge \ x < 0)\}$

d) Schränken Sie den Definitionsbereich von R_6 so ein, dass Eineindeutigkeit vorliegt!

5 Aufgabe

Liegt in folgenden Relationen Eineindeutigkeit vor?

a) Gegeben sei $R = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2x + 1\}$

b) Schränken Sie den Definitionsbereich so ein, dass Eineindeutigkeit vorliegt!

6 Aufgabe

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der De Morgan'schen Regel $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ mittel Wahrheitstabelle!

b) Zeigen Sie die Gültigkeit der De Morgan'schen Regel $\overline{p \Rightarrow q} = \neg q \wedge p$ mittel Wahrheitstabelle!

7 Aufgabe

Gegeben sei $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 6 + 7i$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 6 + 6i$ und $z_5 = 2i$. Berechnen Sie!

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $(z_3)^3$

e) Drehung von z_2 um 45°

f) Drehung von z_2 um 135°

g) $\frac{z_4}{z_3}$

h) $\frac{z_4}{z_5}$

8 Aufgabe

a) $]-\infty, a]^C$ Welches Intervall?

b) $]-\infty, a] \cap]-\infty, b[$ Welches Intervall für $a < b$?

c) $]-\infty, a] \cap]-\infty, b[$ Welches Intervall für $a > b$?

d) $]-\infty, a] \cap]b, \infty[$ Welches Intervall für $a < b$?

e) $]-\infty, a] \cap]b, \infty[$ Welches Intervall für $a > b$?

9 Aufgabe

Berechnen Sie die algebraische Darstellung ($z = a + i \cdot b$) von $z = 3 \cdot (cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha))$ für $\alpha = \pi$!

10 Aufgabe

a) Gegeben sei $z = 4 - 4i$ algebraischer Darstellung. Wandeln Sie die komplexe Zahl in die Polarkoordinatendarstellung um.

b) Gegeben sei $z = \sqrt{32} \cdot (cos(\frac{11\pi}{4}) + i \cdot sin(\frac{11\pi}{4}))$ Polarkoordinatendarstellung. Wandeln Sie die komplexe Zahl in die algebraische Darstellung um.

11 Aufgabe

a) Gegeben sei der Vektor $\vec{v} = \binom{4}{-4}$. Geben Sie eine Gleichung für die Berechnung von $\vec{v}\,'(\alpha)$, wenn der Vektor $\vec{v}$ um den Winkel α gedreht wird!

b) Zeigen Sie, dass eine Drehung von $\vec{v} = \binom{1}{0}$ um $\alpha = 90°$ den Vektor $\vec{v}\,'(90°) = \binom{0}{1}$ ergibt.

12 Aufgabe

a) Handelt es sich bei $x_n = \dfrac{2n^2}{n^2 + n}$ um eine konvergente Zahlenfolge? Begründung.

b) Gegeben sei folgende Zahlenfolge $x_n = \dfrac{2n + 3}{n + 1}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung für n in Abhänigkeit der ε-Umgebung zur Bestimmung des Gliedes n, welches als erstes innerhalb der ε-Umgebung um den Grenzwert der Zahlenfolge x_n auf Aufgabe b) liegt.

13 Aufgabe

a) Gegeben sei folgende Zahlenfolge $x_n = \dfrac{1}{n + 2}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge und N, für $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, so dass gilt $|x_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

b) Gegeben sei folgende Zahlenfolge $x_n = \dfrac{n + 2}{2n}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge und N, für $\varepsilon = \dfrac{1}{10000}$, so dass gilt $|x_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

14 Aufgabe

a) Zeigen Sie, dass gilt $\lim\limits_{x \to -2 \searrow} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$

b) Zeigen Sie, dass gilt $\lim\limits_{x \to -2 \nearrow} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$

c) Zeigen Sie, dass gilt $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{(x+2)^2} = 0$

d) Zeigen Sie, dass gilt $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot cos(x) = 0$

15 Aufgabe

Bestimmen Sie den Grenzwert!

a) $\lim\limits_{x \to 3 \searrow} -\frac{3}{3-x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+4x+5}{9x^2+2x-3}$

16 Aufgabe

Differenzieren Sie $f(x) = x^2$ mit Hilfe einer Grenzwertbetrachtung $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$!

17 Aufgabe

Untersuchen Sie die Stetigkeit für $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ an der Stelle $x = 0$!

18 Aufgabe

a) Wenn eine Virenkultur innerhalb einer Stunde verdoppelt, wie groß ist die Wachstumskonstante λ wenn gilt $2N_0 = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$?

b) Wie viele Viren liegen nach 30min vor, wenn die Wachstumskonstante $\lambda = 1$ beträgt?

c) Um wieviel Prozent haben sich die Viren (aus b)nach 60min vermehrt (bei $\lambda = 1$)?

19 Aufgabe

Berechnen Sie die erste Nachkommastelle von $\sqrt{3}$ mit Hilfe eines Näherungsverfahrens!

20 Aufgabe

Bilden Sie die Umkehrfunktion:

a) $f(x) = (3x+9)^{\frac{1}{3}}$

b) $f(x) = (2x-1)^3$

c) $f(x) = e^{3x-2}$

d) $f(x) = 2x^2+9$ Bestimmen noch zusätzlich des größtmöglichen Definitionsbereich $D(f^{-1})$ der Umkehrfunktion!

Lösungen:

Aufgabe 1:

a) Bei der Relation $R = \{(1,2),(2,1),(5,4),(5,6)\}$ handelt es sich um keine Abbildung, denn dem Wert $x = 5$ sind zwei verschiedene Werte $y = 4$ & $y = 6$ zugeordnet.

b) Bei dieser Relation $R = \{(1,2),(3,2),(4,2)\}$ handelt es sich um eine Abbildung, denn alle Paare haben ein anderes Urbild, also unterschiedliche x-Werte.

c) Bei dieser Relation $R = \{(-7,1),(-3,4),(-1,0.5),(0,0),(3,5),(2,4)\}$ handelt es sich um eine Abbildung, denn alle Paare haben ein anderes Urbild, also unterschiedliche x-Werte.

d) Bei dieser Relation $R = \{(-7,1),(-2,2),(-1,0.5),(0,0),(3,5),(-2,5)\}$ handelt es sich um keine Abbildung, denn dem Wert $x = -2$ sind zwei verschiedene Werte $y = 2$ & $y = 5$ zugeordnet.

Aufgabe 2:

a) Bei der Relation $R_1 = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$ handelt es sich um keine Abbildung, denn z.B. $R_1 = \{(2,3),(2,4)\}$ wäre keine Abbildung. Somit ist die Allgemeingültigkeit widerlegt.

b) Bei der Relation $R_2 = \{(x,y) \mid y = 3x + 4\}$ handelt es sich um eine Abbildung, denn $y = 3x + 4$ ist ein lineare Funktion mit dem Anstieg $m = 3$. Aufgrund der Behauptung, dass eine Abbildung vorliegt muss ein Beweis durchgeführt werden.

   $(x_1, y_1) \in R_2$ & $(x_2, y_2) \in R_2$

   Zu zeigen ist, dass $y_1 = y_2$ gilt.

   Annahme: Es ist keine Abbildung: $x_1 = x_2$ aber $y_1 \neq y_2$

   Beweis: $y_1 = 3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 = y_2$

   Daraus folgt $y_1 = y_2$, die Annahme ist widerlegt und gezeigt, dass es sich um eine Abbildung handelt.

c) Bei der Relation $R_3 = \{(x,y) \mid y \leq 0\}$ handelt es sich um keine Abbildung, denn z.B. $R_3 = \{(1,-3),(1,-5)\}$ wäre keine Abbildung. Somit ist die Allgemeingültigkeit widerlegt.

d) Bei der Relation$R_4 = \{(x,y) \mid y = -\frac{1}{3}x - 4\}$ handelt es sich um eine Abbildung, denn $y = -\frac{1}{3}x - 4$ ist eine lineare Funktion mit dem Anstieg $m = -\frac{1}{3}$. Aufgrund der Behauptung, dass eine Abbildung vorliegt muss ein Beweis durchgeführt werden.

$(x_1, y_1) \in R_4$ & $(x_2, y_2) \in R_4$

Zu zeigen ist, dass $y_1 = y_2$ gilt.

Annahme: Es ist keine Abbildung: $x_1 = x_2$ aber $y_1 \neq y_2$

Beweis: $y_1 = -\frac{1}{3}x_1 - 4 = -\frac{1}{3}x_2 - 4 = y_2$

Daraus folgt $y_1 = y_2$, die Annahme ist widerlegt und gezeigt, dass es sich um eine Abbildung handelt.

Aufgabe 3:

a) Bei der Relation $R_2 = \{(x, y) \mid y = 3x + 4\}$ liegt Eineindeutigkeit vor, denn $y = -\frac{1}{3}x - 4$ ist eine lineare Funktion mit dem Anstieg $m = -\frac{1}{3}$. Bei linearen Funktionen mit dem Anstieg $m \neq 0$ wird jedem Element x genau ein Element y zugeordnet und gleichzeitig wird jedem Element y genau ein Element x zugeordnet. Aufgrund der Behauptung, dass Eineindeutigkeit vorliegt muss ein Beweis durchgeführt werden.

$(x_1, y_1) \in R_2$ & $(x_2, y_2) \in R_2$

Zu zeigen ist, dass $y_1 = y_2$ gilt.

Annahme: Es liegt keine Eineindeutigkeit vor: $x_1 \neq x_2$ aber $y_1 = y_2$

Beweis: $x_1 = \frac{y_{1-} - 4}{3} = \frac{y_{2-} - 4}{3} = x_1 = x_2$ für zu einem Widerspruch und die Eineindeutigkeit ist belegt durch $x_1 = x_2$.

b) Umkehrabbildung: $f(y) = x = \frac{y - 4}{3}$

Aufgabe 3:

a) Bei der Relation $R_2 = \{(x, y) \mid y = 3x + 4\}$ liegt Eineindeutigkeit vor, denn $y = 3x + 4$ ist eine lineare Funktion mit dem Anstieg $m = 3$. Bei linearen Funktionen mit dem Anstieg $m \neq 0$ wird jedem Element x genau ein Element y zugeordnet und gleichzeitig wird jedem Element y genau ein Element x zugeordnet. Aufgrund der Behauptung, dass Eineindeutigkeit vorliegt muss ein Beweis durchgeführt werden.

$(x_1, y_1) \in R_2$ & $(x_2, y_2) \in R_2$

Zu zeigen ist, dass $x_1 = x_2$ gilt.

Annahme: Es liegt keine Eineindeutigkeit vor: $x_1 \neq x_2$ aber $y_1 = y_2$

Beweis: $x_1 = \frac{y_{1-} - 4}{3} = \frac{y_{2-} - 4}{3} = x_1 = x_2$ für zu einem Widerspruch und die Eineindeutigkeit ist belegt durch $x_1 = x_2$.

b) Umkehrabbildung: $f(y) = x = \frac{y-4}{3}$

c) Bei der Relation $R_4 = \{(x, y) \mid y = -\frac{1}{3}x - 4\}$ liegt Eineindeutigkeit vor, denn $y = -\frac{1}{3}x - 4$ ist eine lineare Funktion mit dem Anstieg $m = -\frac{1}{3}$. Bei linearen Funktionen mit dem Anstieg $m \neq 0$ wird jedem Element x genau ein Element y zugeordnet und gleichzeitig wird jedem Element y genau ein Element x zugeordnet. Aufgrund der Behauptung, dass Eineindeutigkeit vorliegt muss ein Beweis durchgeführt werden.

$(x_1, y_1) \in R_4$ & $(x_2, y_2) \in R_4$

Zu zeigen ist, dass $x_1 = x_2$ gilt.

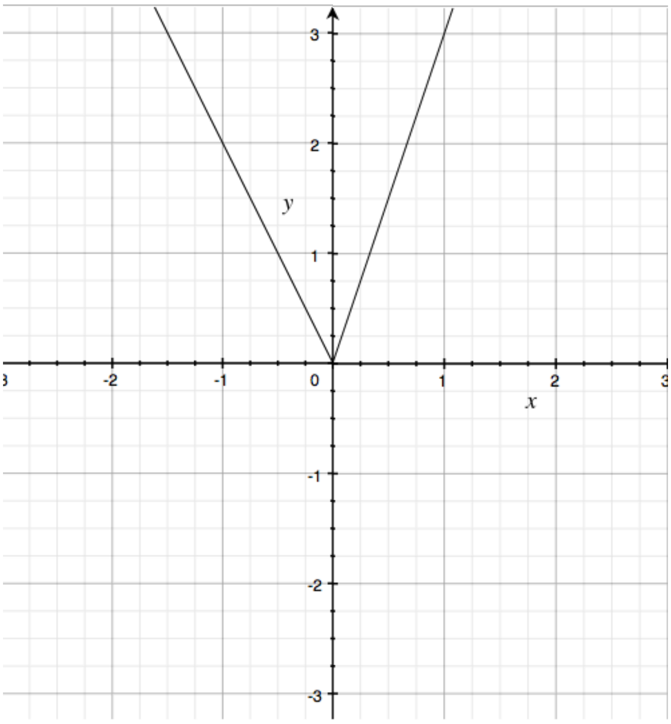
Annahme: Es liegt keine Eineindeutigkeit vor: $x_1 \neq x_2$ aber $y_1 = y_2$

Beweis: $x_1 = -3(y_1 + 4) = -3(y_2 + 4) = x_1 = x_2$ für zu einem Widerspruch und die Eineindeutigkeit ist belegt durch $x_1 = x_2$.

d) Umkehrabbildung: $x_1 = -3(y_1 + 4)$

Aufgabe 4:

a) Bei der Relation $R_5 = \{(x, y) \mid (y = 3x \;\wedge\; x \geq 0) \vee (y = -2x \;\wedge\; x < 0)\}$ liegt keine Eineindeutigkeit vor, denn $y = 3x$ ist eine lineare Funktion mit dem Anstieg $m = 3$ und $y = -2$ ist eine lineare Funktion mit dem Anstieg $m = -2$. Mit dem gegebenem Definitionsbereich ergibt sich ein nach oben geöffneter V-förmiger Graph mit Spitze auf dem Ursprung. Die Anstiege beider Funktionen sind zwar $m \neq 0$, aber sie bilden ein V. Somit wird zwar jedem Element x genau ein Element y zugeordnet, aber nicht jedem Element y genau ein Wert x zugeordnet. Dadurch liegt keine Eineindeutigkeit vor.
Hier reicht ein Gegenbeispiel um die Allgemeingültigkeit von R_5 zu widerlegen.



$y = 1$ eingesetzt in die Gleichungen:

$1 = 3x$ & $1 = -2x$ ergibt zwei verschiedene x-Werte: $x_1 = \frac{1}{3}$ & $x_2 = -\frac{1}{2}$. $y = 1$ hat demzufolge 2 dazugehörige x-Werte und ist somit nicht eineindeutig.

b) Der Definitionsbereich könnte folgendermaßen zusätzlich eingeschränkt werden: $D = \{x \mid x \geq 0\}$ oder $D = \{x \mid x \leq 0\}$. Dadurch würde jeweils eine der beiden linearen Funktionen wegfallen und es läge Eineindeutigkeit vor.

Aufgabe 5:

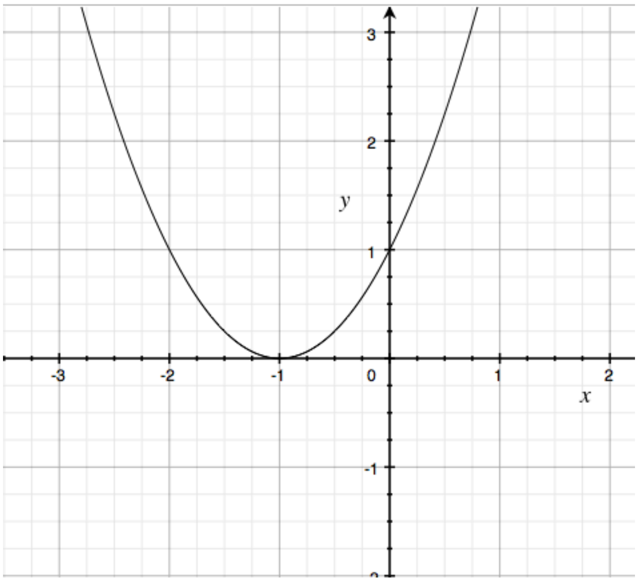
a) Bei der Relation $R = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2x + 1\}$ liegt keine Eineindeutigkeit vor, denn $y = x^2 + 2x + 1$ ist eine nach oben geöffnete quadratische Funktion (Parabel). Hier muss nun entsprechend ein Gegenbeispiel gefunden werden, um zu zeigen, dass es bei einer Stelle x (x-Wert) der Funktion, eine zweite Stelle exisitert, die den gleichen y-Wert besitzt. Zunächst muss die Parabel nach x umgestellt werden.

$y = x^2 + 2x + 1$, Binomische Formel liefert: $y = (x + 1)^2$
$\sqrt{y} = \sqrt{(x + 1)^2}$
$\sqrt{y} = \pm(x + 1)$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{y}$

Beispiel: $y = 4$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4}$
$x_1 = 1$

$x_1 = -3$

Die Stellen $x = -3$ und $x = 1$ haben den gleichen y-Wert $y = 4$



b) Der Definitionsbereich könnte folgendermaßen eingeschränkt werden. Die Funktion oder Abbildung wäre nur eineindeutig wenn die Funktion entweder nur links oder nur rechts des Scheitelpunktes definiert (eingeschränkt) wäre. Um den Definitionsbereich einzuschränken muss die Stelle des Scheitelpunktes bestimmt werden. In der Grafik ist zu erkennen, dass der Scheitelpunkt an der Stelle $x = -1$ liegt. Man kann die Stelle beispielsweise über die erste Ableitung berechnen. Denn der Scheitelpunkt ist ein Extremum (Minimum).

$f(x) = y = x^2 + 2x + 1$
$f'(x) = y' = 2x + 2$
$f'(x) = 0$
$2x + 2 = 0$
$x = -1$

$D = \{x \mid x \geq -1\}$ oder $D = \{x \mid x \leq -1\}$ wären die zwei möglichen Einschränkungen, denn es wird entweder der linke oder rechte Teil der Parabel am Scheitelpunkt weggeschnitten.

Aufgabe 6:

a) $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

b) $\overline{p \Rightarrow q} = \neg q \wedge p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$\neg q$	$\neg q \wedge p$
1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0

Aufgabe 7:

$z_1 = 3 + 4i$
$z_2 = 6 + 7i$
$z_3 = 1 + i$
$z_4 = 6 + 6i$
$z_5 = 2i$

$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$
$z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$

$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$
$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i$
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2) - (y_1 \cdot y_2) + ((x_1 \cdot y_2) + (y_1 \cdot x_2))i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + (y_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$

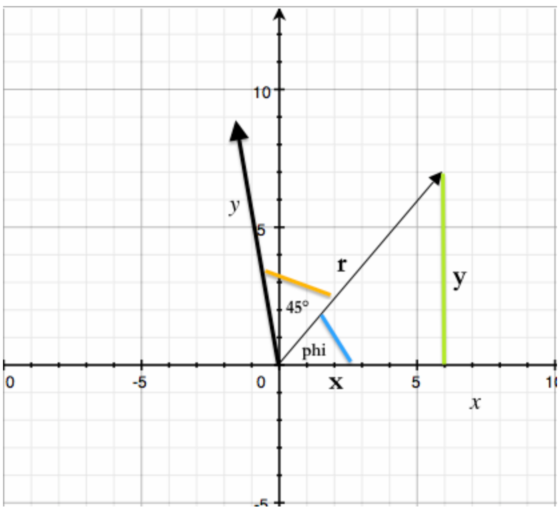
a) $z_1 + z_2 = 3 + 4i + 6 + 7i = 9 + 11i$

b) $z_1 - z_2 = 3 + 4i - (6 + 7i) = 3 - 6 + (4 - 7)i = -3 - 3i$

c) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (6 + 7i) = ((6 \cdot 3) - (4 \cdot 7)) + ((3 \cdot 7) + (4 \cdot 6))i = -10 + 45i$

d) $(z_3)^3 = (1 - 1 + (1 + 1)i) \cdot (1 + i) = 2i \cdot (1 + i) = 0 - 2 + (0 + 2)i = -2 + 2i$

e) Drehung von z_2 um 45°



$z_2 = 6 + 7i$
Satz des Pythagoras: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$
$sin(\varphi) = \frac{y}{r}$

$cos(\varphi) = \frac{x}{r}$

$tan(\varphi) = \frac{y}{x}$

$tan(\varphi) = \frac{7}{6}\ \varphi \simeq 49,3987°$
$\varphi + 45° = \varphi_{neu} = 94,3987°$

$sin(\varphi_{neu}) = \frac{y}{r}$

$y = r \cdot sin(\varphi_{neu})$

$y = \sqrt{85} \cdot sin(94,3987°)$

$y \simeq 9,1924$

$cos(\varphi_{neu}) = \frac{x}{r}$

$x = r \cdot cos(\varphi_{neu})$

$x = \sqrt{85} \cdot cos(94,3987°)$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 9,1924i$

f) Drehung von z_2 um 135°

$z_2 = 6 + 7i$
Satz des Pythagoras: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$
$sin(\varphi) = \frac{y}{r}$

$cos(\varphi) = \frac{x}{r}$

$tan(\varphi) = \frac{y}{x}$

$tan(\varphi) = \frac{7}{6}$ $\varphi \simeq 49,3987°$
$\varphi + 135° = \varphi_{neu} = 184,3987°$

$$sin(\varphi_{neu}) = \frac{y}{r}$$

$$y = r \cdot sin(\varphi_{neu})$$

$$y = \sqrt{85} \cdot sin(184,3987°)$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos(\varphi_{neu}) = \frac{x}{r}$$

$$x = r \cdot cos(\varphi_{neu})$$

$$x = \sqrt{85} \cdot cos(184,3987°)$$

$$x = -9,1924$$

$$z = -9,1924 - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

g) $\frac{z_4}{z_3} = \frac{6+6i}{1+i} = \frac{(6 \cdot 1 + 6 \cdot 1) + (6 \cdot 1 + 6 \cdot 1)i}{1^2 + 1^2} = 6 + 6i$

h) $\frac{z_4}{z_5} = \frac{6+6i}{0+2i} = \frac{(6 \cdot 0 + 6 \cdot 2) + (6 \cdot 0 + 6 \cdot 2)i}{0^2 + 2^2} = 3 + 3i$

Aufgabe 8:

a) $]-\infty, a]^C =]a, \infty[$

b) $]-\infty, a] \cap]-\infty, b[$ für $a < b$: $=]-\infty, a]$

c) $]-\infty, a] \cap]-\infty, b[$ für $a > b$: $=]-\infty, b[$

d) $]-\infty, a] \cap]b, \infty[$ für $a < b$: $= [\ ,\ ]$

e) $]-\infty, a] \cap]b, \infty[$ für $a > b$: $=]a, b]$

Aufgabe 9:

$z = a + i \cdot b$

$z = 3 \cdot (cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha))$

$\alpha = \pi$

$r = 3 = \sqrt{9}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = \sqrt{0^2 + 3^2}$

$y = 3$

$z = a + b \cdot i$

$z = 0 + 3 \cdot i$

$z = 3 \cdot i$

Aufgabe 10:

a) $z = 4 - 4i$

$z = r \cdot (cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha))$

$r = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$

$tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{4}{-4}$

$\alpha = \frac{7}{4}\pi = 315°$

$z = \sqrt{32} \cdot (cos(\frac{7}{4}\pi) + i \cdot sin(\frac{7}{4}\pi))$

b) $z = \sqrt{32} \cdot (cos(\frac{11\pi}{4}) + i \cdot sin(\frac{11\pi}{4}))$

$z = \sqrt{32} \cdot (cos(\frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}) + i \cdot sin(\frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}))$

$\frac{8\pi}{4} = 2\pi$

Eine Verschiebung der Kosinusfunktion entlang der X-Achse, um 2π ergibt wieder die gleiche Kosinusfunktion, denn die Periodenlänge der Funktion ist 2π. Die Funktion wiederholt sich vollständig periodisch nach 2π und darum ändert sich durch die Verschiebung nichts und es kann weggelassen werden.

$$x = r \cdot cos(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{32} \cdot cos(\frac{3}{4}\pi) = -4$$

$$y = r \cdot sin(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{32} \cdot sin(\frac{3}{4}\pi) = 4$$

$$z = -4 + 4i$$

Aufgabe 11:

a) $\vec{v} = \binom{4}{-4}$

$z = 4 - 4i$

Drehung: $w = cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)$

$z \cdot w = 4cos(\alpha) + 4 \cdot i \cdot sin(\alpha) - 4 \cdot i \cdot cos(\alpha) - 4 \cdot i^2 \cdot sin(\alpha))$

Auslammern von i & ersetzen von i^2 durch -1 führt zu:

$z \cdot w = 4cos(\alpha) + 4sin(\alpha) + i(4sin(\alpha) - 4cos(\alpha))$

Die komplexe Zahl befindet sich nun in der algebraischen Darstellung und kann wieder in einen Vektor umgewandelt werden.

$\vec{v}\,' = \binom{4cos(\alpha)+4sin(\alpha)}{4sin(\alpha)-4cos(\alpha)}$

b) $\vec{v} = \binom{1}{0}$

$z = 1 - 0i$

Drehung: $w = cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot sin(\frac{\pi}{2})$

$\alpha = 90° \triangleq \alpha = \frac{\pi}{2}$

$w = 0 + i \cdot 1$

$z \cdot w = 0 + 1 \cdot i$

$\vec{v}\,'(90°) = \binom{0}{1}$

Aufgabe 12:

a) Ja, denn die Folge $x_n = \frac{2n^2}{n^2+n}$ konvergiert gegen den Grenzwert $g = 2$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 2}{n^2 \cdot (1+\frac{1}{n})} = \frac{2}{1+0} = 2$$

b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (2+\frac{3}{n})}{n \cdot (1+\frac{1}{n})} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

c) $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$ besitzt den Grenzwert 2.

$\varepsilon > \mid x_n - g \mid$

$\varepsilon > \mid \frac{2n+3}{n+1} - 2 \mid$

$\varepsilon > \mid \frac{3}{n+1} \mid$

$n + 1 = \frac{3}{\varepsilon}$

$n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$

Aufgabe 13:

a) $x_n = \frac{1}{n+2}$ besitzt den Grenzwert $g = 0$, denn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2}$ lässt den Nenner unendlich groß werden, während der Zähler konstant bei 1 bleibt. Somit werden die Glieder der Zahlenfolge mit steigendem n immer kleiner aber nicht negativ, denn für n gilt $n > 0$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{n(1+\frac{2}{n})} = \frac{0}{1+0} = 0$, Die Rechnung ist zwar optisch plausibel und mathematisch nicht unbedingt falsch aber leider nicht besonders edel, also wäre die obere Begründung für den Grenzwert hier besser!

$|x_n - g| < \varepsilon$
$|\frac{1}{n+2} - 0| < \frac{1}{1000}$
$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{1000}$

$n + 2 > 1000$

$N = 998$

b) $x_n = \frac{n+2}{2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

$|x_n - g| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{10000}$

$|\frac{n+2}{2n} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10000}$

$|\frac{n+2-n}{2n}| < \frac{1}{10000}$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{10000}$

$N = 10000$

Aufgabe 14:

a) $\lim\limits_{x\to -2\searrow} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$

$x_n = -2 + \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{x\to -2\searrow} \frac{1}{(x+2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(x_n+2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{n})^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to -2\nearrow} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$

$x_n = -2 - \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{x\to -2\nearrow} \frac{1}{(x+2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(x_n+2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(-\frac{1}{n})^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{(x+2)^2} = 0$

$x_n = n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(x_n+2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n^2+4n+4)} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot cos(x) = 0$

$x_n = n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot cos(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot cos(n) = 0$$

$\frac{1}{n}$ ist eine sogenannte Nullfolge und bringt als Faktor den Wert 0 für das Produkt.

Aufgabe 15:

a) $\lim\limits_{x\to 3\searrow} -\frac{3}{3-x}$

$x_n = 3 + \frac{1}{n}$

$$\lim_{x\to 3\searrow} -\frac{3}{3-x} = \lim_{n\to\infty} -\frac{3}{3-x_n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{3}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3n = \infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x+5}{9x^2+2x-3}$

$x_n = n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x+5}{9x^2+2x-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+5}{9n^2+2n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{n^2(9+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 16:

$f(x) = x^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x = f\,'(x)$$

Aufgabe 17:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$

Ist der links und rechtsseitige Grenzwert an der Stelle gleich, so ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig.

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = g \to f(0) = 0^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0\nearrow} x = 0 = g$$

Aufgabe 18:

a) Wie groß ist die Wachstumskonstante λ? $2N_0 = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
$2 = e^{\lambda \cdot t} \rightarrow$ Logarithmieren!
$ln2 = \lambda \cdot t$
$t = 1$
$\lambda = ln2$

b) Wie viele Viren liegen nach 30min vor? $\lambda = 1$ $t = 30min = 0.5$
$N = N_0 \cdot e^{0.5}$
Nach 30min liegt eine ca. $e^{0.5} \simeq 1.649$-fache Anzahl der Viren vor.

c) Um wieviel Prozent haben sich die Viren (aus b) nach 60min vermehrt?

$$\frac{N_0 \cdot e^{0.5} \cdot e^1}{N_0 \cdot e^{0.5}} = e^1 \simeq 2,71 \simeq 271\%$$

Aufgabe 19:

$\sqrt{3}$
$16^2 = 256$
$17^2 = 289$
$18^2 = 324$
$19^2 = 361$
erste Nachkommastelle ist entweder $1,7$ oder $1,8$
$1,7^2 = 2,89$
$1,8^2 = 3,24$
Die 8 als erste Nackommastelle kommt nicht in Frage weil das Ergebnis dann größer als 3 ist. Bei der 7 als erste Nachkommstelle ist das Ergebnis kleiner als 3. Also ist die 7 die erste Nachkommastelle.

Aufgabe 20:

a) $f(x) = (3x+9)^{\frac{1}{3}}$

$$y = (3x+9)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = \sqrt[3]{3x+9}$$

$$y^3 = 3x+9$$

$$f^{-1}(y) = x = \frac{y^3 - 9}{3}$$

b) $f(x) = (2x-1)^3$

$y = (2x-1)^3$

$\sqrt[3]{y} = 2x - 1$

$f^{-1}(y) = x = \dfrac{\sqrt[3]{y}-1}{2}$

c) $f(x) = e^{3x-2}$

$y = e^{3x-2}$

$lny = 3x - 2$

$f^{-1}(y) = x = \dfrac{lny + 2}{3}$

d) $f(x) = 2x^2 + 9$

$y = 2x^2 + 9$

$x^2 = \dfrac{y-9}{2}$

$f^{-1}(y) = x = \sqrt{\dfrac{y-9}{2}}$

$D(f^{-1}) \rightarrow \dfrac{y-9}{2} \geq 0$

$D(f^{-1}) = \{y | y \geq 9\}$

Die Einschränkung sollte man hier durchführen, damit unter der Wurzel keine negativen Werte stehen!