Eindimensionale stetige Zufallsvariablen (Kapitel 4)

Grundbegriffe:

$f(x)$	Dichtefunktion der Zufallsvariable x
$F(x)$	Verteilungsfunktion der Zufallsvariable x
$E(x)$	Erwartungswert der Zufallsvariable x
$Var(x)=\sigma^2$	Varianz der Zufallsvariable x
$P(a\leqslant x\leqslant b)$	Wahrscheinlichkeit

Formelsammlung: S. 51 – 52

Übungsaufgaben:

(1) Gegeben ist folgende Funktion:

$$f(x)=\{0,\ \text{für}\ -\infty<x<0\ ;\ a(x^3-x^2),\ \text{für}\ 0\leqslant x\leqslant 1\ ;\ 0,\ \text{für}\ 1<x<\infty$$

a) Für welchen Wert a ist f(x) Dichtefunktion einer Zufallsgröße X?
b) Berechnen Sie P(0 ≤ X ≤ 0,5).
c) Bestimmen Sie Erwartungswert E(x), Varianz Var(x) und Standardabweichung.

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$
Bedingung, die erfüllt sein muss, damit f(x) eine Dichtefunktion ist.
Nun wird der Wert für a gesucht, bei dem diese Bedingung erfüllt ist.

$$\int_0^1 a(x^3-x^2)\,dx=1$$

$$\int_0^1 (ax^3-ax^2)\,dx=1$$

$$\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=1$$

$$\frac{a}{4}-\frac{a}{3}-(0-0)=1$$

$$\frac{-a}{12}=1$$

$$a=-12$$

Daraus folgt als Dichtefunktion:

$$f(x)=\{0,\ \mathit{für} -\infty<x<0\ ; -12(x^3-x^2),\ \mathit{für}\ 0\leqslant x\leqslant 1\ ; 0,\ \mathit{für}\ 1<x<\infty$$

b)

$$P(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2})=31{,}25\,\%$$

c)

$$E(x)=0{,}6$$

$$\sigma^2=0{,}04$$

$$\sigma=\pm 0{,}02$$

$$\sigma=\pm 42{,}5\,kg$$

(2) Die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße T sei

Berechnen Sie:

a) P(3 ≤ T ≤ 4)
b) P(T ≥ 3)
c) E(T)
d) Var(T)

a)

$$P(3\leqslant t\leqslant 4)=17{,}13\,\%$$

b)

$$P(t\geqslant 3)=1-P(3\leqslant t\leqslant 0)$$

$$P(t\geqslant 3)=29{,}63\,\%$$

c)

$$E(t)=3$$

d)

$$\sigma^2=3$$

Lineare Transformation (Kapitel 5)

Grundbegriffe:

Y	linear transformierte Zufallsgröße
$E(Y)$	Erwartungswert der linear transformierten Zufallsgröße
$Var(Y)$	Varianz der linear transformierte Zufallsgröße

Formelsammlung: S. 52

Übungsaufgaben:

(1) Ein Taxiunternehmen hat festgestellt, dass das Körpergewicht der Fahrgäste durchschnittlich 72,5 kg beträgt, bei einer Standardabweichung von 8,5 kg. Mit einem Taxi eines bestimmten Fahrzeugtyps dürfen maximal 4 Fahrgäste befördert werden.

Wie groß sind E(Y) und Var(Y) für das Gesamtgewicht des Fahrzeuges, wenn dieses voll besetzt ist und ein Leergewicht von 1 Tonne aufweist?

<u>Gegeben:</u>

X: Körpergewicht

$E(x)=72{,}5\,kg$	Durchschnittsgewicht der Fahrgäste
$\sigma=\pm 8{,}5\,kg$	Standardabweichung der Fahrgäste

max. 4 Fahrgäste

$Y=ax+b$	Linear transformierte Zufallsgröße
$Y=5x+1000$	

<u>Gesucht:</u>

$E(Y)=?$

$Var(Y)=?$

<u>Lösung:</u>

$E(Y)=a*E(x)+b$ FS S.52 Erwartungswert

$E(Y) = 5 * E(x) + 1000$

$E(Y) = 5 * 72{,}5 + 1000$

$E(Y) = 1362{,}5\ kg$

$Var(Y) = a^2 * Var(x)$ FS S.52 Varianz

$Var(Y) = 5^2 * Var(x)$

$Var(Y) = 25 * 8{,}5^2\ kg^2$

$Var(Y) = 1806{,}25\ kg^2$

$\sigma = \pm 42{,}5\ kg$

(3) Weitere Übungsaufgaben:

Weitere Übungsaufgaben zu diesem Kapitel sind erhältlich im „share“-Ordner der Fakultät Wirtschaft im Unterordner „Statistik“.

Bei den später ausgegebenen Klausuren wird auffallen, dass dieses Kapitel nur in wenigen Prüfungen ein Rolle spielt. Nichtsdestotrotz sollte man wissen, wie sich ein solches Problem lösen lässt.