Lösungen der Extremwertaufgaben

zu Bsp.: 1

geg.: Zielfunktion $x(r_1,r_2) = 2 \cdot r_1 \cdot r_2$

Nebenbedingung: $10r_1 + 20r_2 = 400$

→Nebenbedingung null setzen und mit λ multiplizieren

$10r_1 + 20r_2 - 400 = 0$ mit λ multiplizieren

$10r_1\lambda + 20r_2\lambda - 400\lambda = 0$

→Lagrange - Funktion bilden, indem die Zielfunktion mit der Nebenbedingung addiert wird

$x(r_1,r_2,\lambda) = 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + 10r_1\lambda + 20r_2\lambda - 400\lambda$

→partielle Ableitungen bilden

I. $x_{r1} = 2r_2 + 10\lambda$

II. $x_{r2} = 2r_1 + 20\lambda$

III. $x_{\lambda} = 10r_1 + 20r_2 - 400$

→ Gleichungen lösen

I nach r_2 auflösen

$2r_2 + 10\lambda = 0$

$2r_2 = -10\lambda$

$r_2 = -5\lambda$

II nach r_1 auflösen

$2r_1 + 20\lambda = 0$

$2r_1 = 20\lambda$

$r_1 = -10\lambda$

r_1 und r_2 in III einsetzen

$10(-10\lambda) + 20(-5\lambda) - 400 = 0$

$-100\lambda - 100\lambda - 400 = 0$

$-200\lambda = 400$

$\lambda = -2$

$r_2 = -5\lambda$ $\quad\quad$ $r_1 = -10\lambda$

$= -5 \cdot -2$ $\quad\quad$ $= -10 \cdot -2$

$\underline{= 10}$ $\quad\quad$ $\underline{= 20}$

Werden vom ersten Produktionsfaktor r_1 20 ME und vom zweiten Produktionsfaktor r_2 10 ME eingesetzt, dann wird das zur Verfügung stehende Budget vollständig verbraucht und dabei der maximale Output von x = 400 realisiert.

<u>zu Bsp.: 2</u>

geg.: $G(x,y) = 16x + 10y + 2xy - 4x^2 - 2y^2 - 20 \rightarrow \max!$

unter der Bedingung

$x + y = 4$

$x\lambda + y\lambda - 4\lambda = 0$

Lagrange- Funktion:

$G(x,y,\lambda) = 16x + 10y + 2xy - 4x^2 - 2y^2 - 20 + x\lambda + y\lambda - 4\lambda$

I. $\quad G_x = 16 + 2y - 8x + \lambda$

II. $\quad G_y = 10 + 2x - 4y + \lambda$

III. $\quad G_\lambda = x + y - 4$

<u>III nach x auflösen</u>

$x + y - 4 = 0$

$x = 4 - y$

<u>x in II einsetzen und umformen nach λ</u>

$10 + 2(4-y) - 4y + \lambda = 0$

$10 + 8 - 2y - 4y + \lambda = 0$

$18 - 6y + \lambda = 0$

$\lambda = 6y - 18$

<u>x und λ in I einsetzen</u>

$16 + 2y - 8(4-y) - 18 + 6y = 0$

$16 + 2y - 32 + 8y - 18 + 6y = 0$

$16y = 34$

$y = \frac{17}{8}$

$\lambda = -18 + 6 \cdot \frac{17}{8} = \frac{21}{4}$

$x = 4 - \frac{17}{8} = \frac{15}{8}$

$G(x,y) = \frac{129}{8}$

Stellt das Unternehmen vom ersten Gut $x = \frac{15}{8}$ ME und vom zweiten Gut $y = \frac{17}{8}$ ME her, dann schöpft es die zur Verfügung stehenden Kapazitäten vollständig aus und erzielt einen Gewinn von $G = \frac{129}{8}$ GE.

zu Bsp.: 3

geg.: $p(x) = 15.000 - 3.000x$

$p(y) = 4.000 - 200y$

Nebenbedingung: $x+y = 10$

Man erhält folgende Preis-Absatz-Funktion für den Tagesumsatz:

$E(x,y) = x \cdot p(x) + y \cdot p(y)$

$= x \cdot (15.000 - 3.000x) + y \cdot (4.000 - 200y)$

$= -3.000x^2 + 15.000x - 200y^2 + 4.000y \rightarrow \max!$

unter der Bedingung $x + y = 10$

$x\lambda + y\lambda - 10\lambda = 0$

Lagrange-Funktion:

$P(x,y,\lambda) = -3.000x^2 + 15.000x - 200y^2 + 4.000y + x\lambda + y\lambda - 10\lambda$

I. $P_x = 15.000 - 6.000x + \lambda$

II. $P_y = 4.000 - 400y + \lambda$

III. $P_\lambda = x + y - 10$

I nach x auflösen

$15.000 - 6.000x + \lambda = 0$

$- 6.000x = -15.000 - \lambda$

$x \qquad = 2,5 + \frac{1}{6.000}\lambda$

<u>II nach y auflösen</u>

$4.000 - 400y + \lambda = 0$

$4.000 + \lambda \qquad = 400y$

$10 + \frac{1}{400}\lambda \qquad = y$

<u>x und y in III einsetzen</u>

$2,5 + \frac{1}{6.000}\lambda + 10 + \frac{1}{400}\lambda - 10 = 0$

$\frac{1}{375}\lambda \qquad = - 2,5$

$\lambda \qquad = -\frac{1875}{2}$

$x = 2,5 + \frac{1}{6.000} \cdot -\frac{1875}{2} = \frac{75}{32}$

$y = 10 + \frac{1}{400} \cdot -\frac{1875}{2} = \frac{245}{32}$