Lösung: Gebrochenrationale Funktion Bsp.: 1

a) Definitionsbereich

Db.: x $\in$ Reelle Zahlen (durch das Quadrat im Nenner wird alles positiv und auch wenn x = 0, wird Nenner nicht 0, da 3 vorhanden)

b) Nullstellen

f(x) = 0

$\frac{9-x^2}{x^2+3} = 0$

(Es reicht aus, sofort nur den Zähler = 0 zu setzen, da durch Multiplikation des Nenners mit null der Zähler wegfällt)

$9 - x^2 = 0$
$9 = x^2$

$\sqrt{9} = x_{1,2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = -3$

c) Verhalten im Unendlichen

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{9-x^2}{x^2+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(\frac{9}{x^2}-1)}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = -1$

d) Extrempunkte und Art des Extrema

→Ableitungen bilden

$f'(x) = \frac{-24x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x) = \frac{72x^2-72}{(x^2+3)^3}$

Extrema: f'(x) = 0

-24x = 0

x = 0

$f''(0) = -\frac{8}{3} \rightarrow$ Maximum

f(0) = 3

HP(0,3)

__Lösung Aufgabe 2__

$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

a) Definitionsbereich

x ∈ Reelle Zahlen / {0}

b) Symmetrie

$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

$f(-x) = \frac{2(-x)-1}{(-x)^2} = \frac{-2x-1}{x^2} \rightarrow f(x) \neq f(-x) \rightarrow$ keine Achsensymmetrie

$-f(x) = -(\frac{2x-1}{x^2}) \neq f(-x) \rightarrow$ keine Punktsymmetrie

Erklärung auch einfacher möglich:

Ist die Funktion gerade, liegt Achsensymmetrie vor

Ist die Funktion ungerade, liegt Punktsymmetrie vor.

Da die Funktion jeweils einen geraden und ungeraden Exponenten hat, liegt keine Symmetrie vor.

c) Verhalten im Unendlichen

$\lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x^2(1)} = \lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$

Asymptote ist y= 0.

d) Achsenschnittpunkte

Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle):

$f(x) = 0$

$2x - 1 = 0$

$x \quad = 0{,}5$

$S_x(0{,}5;0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$x = 0$

$\frac{2 \cdot 0 - 1}{0^2}$ = n.l. → x = 0 gehört nicht zum Definitionsbereich von f, d.h. der Graph von f hat keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

e) Extrempunkt und Art des Extrema

→Ableitungen bilden

$f'(x) = \frac{2-2x}{x^3}$

$f''(x) = \frac{4x-6}{x^4}$

$f'''(x) = \frac{24-12x}{x^5}$

Extrema: $f'(x) = 0$ $\quad$ $f''(1) = -2$ → Maximum

$2-2x = 0$ $\quad$ $f(1) = 1$

$x = 1$

HP(1,1)

f) Wendepunkte

$f''(x) = 0$ $\quad$ $f'''(\frac{3}{2}) = 0{,}79 \neq 0 \rightarrow \mathit{WP\ existiert}$

$4x - 6 = 0$ $\quad$ $f(\frac{3}{2}) = \frac{8}{9}$

$4x = 6$

$x = \frac{3}{2}$ $\quad$ $WP(\frac{3}{2}, \frac{8}{9})$

g) Wendetangente

a) Anstieg: $m = f'(x)$

$m = f'(\frac{3}{2}) = -\frac{8}{27}$

b) Gleichung: $y = mx + n$

$\frac{8}{9} = -\frac{8}{27} \cdot \frac{3}{2} + n$

$n = \frac{4}{3}$

$y = -\frac{8}{27}x + \frac{4}{3}$