

Python - Programmierung für die Computerbasierte Intelligenz

Tobias Häuser

Vorlesung 4.2.

25.08.2018



1. k-Means

1. Einführung
2. Eigeneimplementierung
3. Beispiel Farbenskalierung im Bild

2. Fuzzy k-Means

1. Einführung
2. Eigenimplementierung

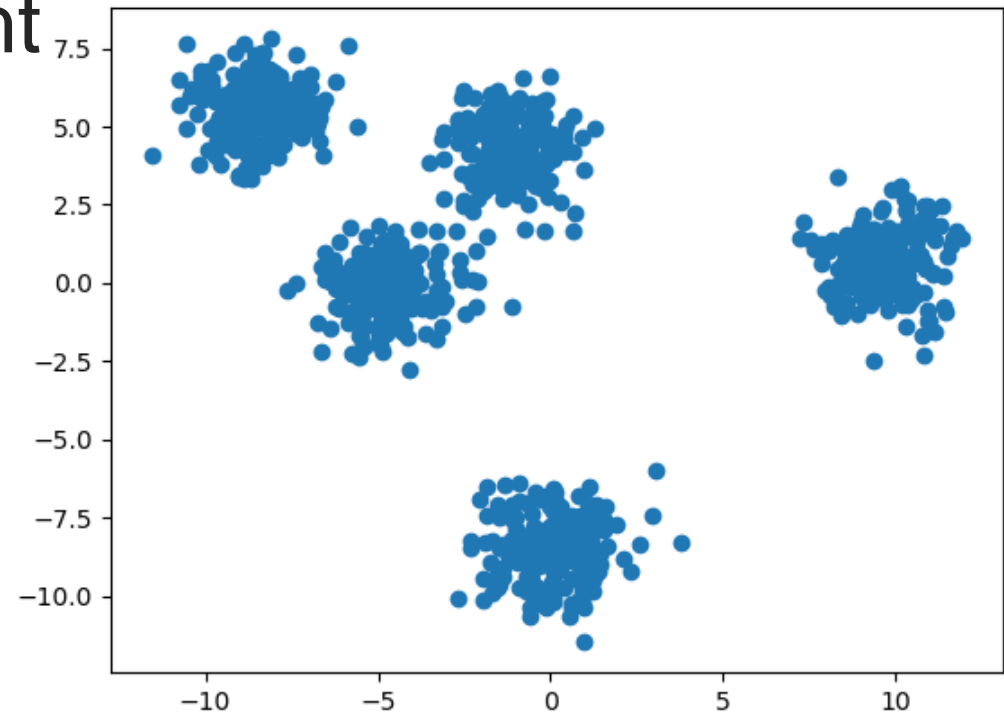
3. Gustafson-Kessel

1. Einführung
2. Eigenimplementierung



1.1. k-Means - Einführung

- Ein Algorithmus der zur Clusteranalyse verwendet wird
 - Bzw. sind auf dem Bild 5 Cluster zu erkennen (Gruppen)
 - der PC weiß dies jedoch nicht
 - Wir geben ihm die Anzahl der Gruppen vor und er berechnet welcher dieser Punkte zu welchem Cluster gehören



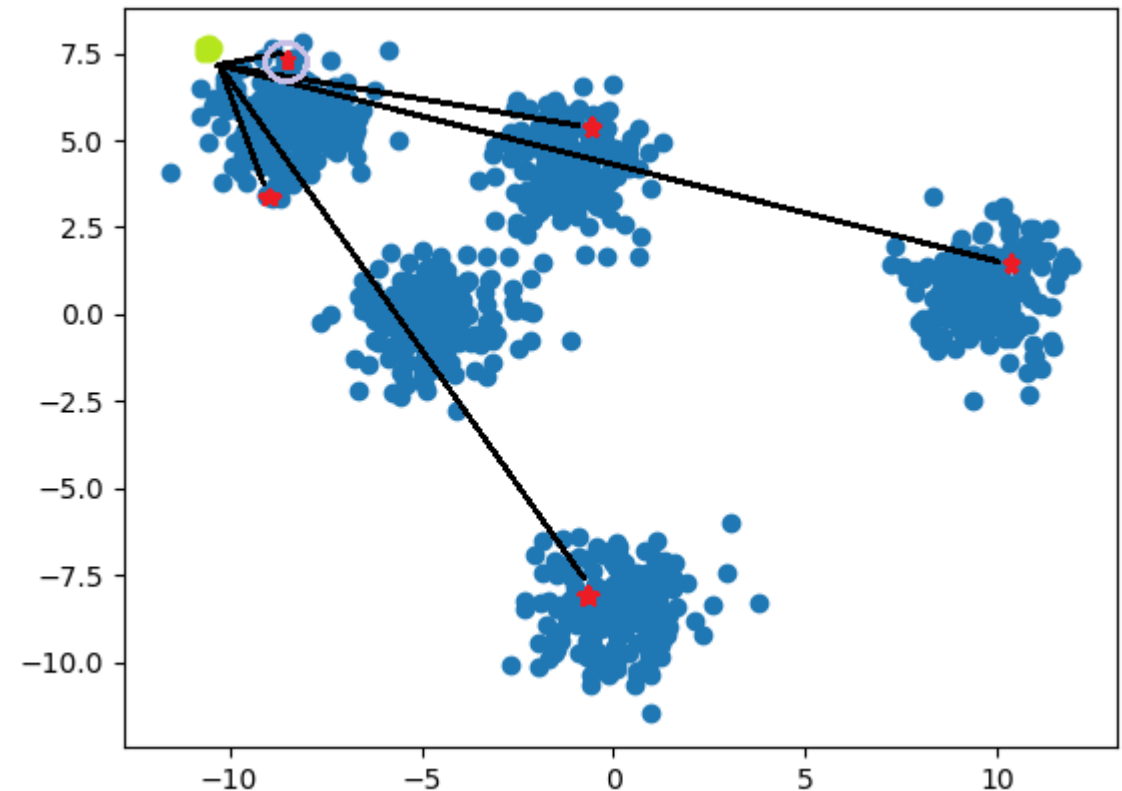
1.1. Einführung

- Der am häufigsten verwendete Algorithmus hierbei ist der Lloyd-Algorithmus, welches aus 3 Schritten besteht
 1. Initialisierung der k zufälligen Mittelwerte
 2. Zuordnung der Datenpunkte zu einem Cluster
 - Hierbei wird die euklidische Distanz von jedem Punkt zu jedem Cluster gebildet
 - Der Punkt wird dem Cluster zugewiesen, zu welchem die Distanz am geringsten ist
 3. Berechnen der Mittelpunkte des Clusters
- Schritt 2 & 3 werden wiederholt bis sich die Mittelpunkte nicht mehr ändern

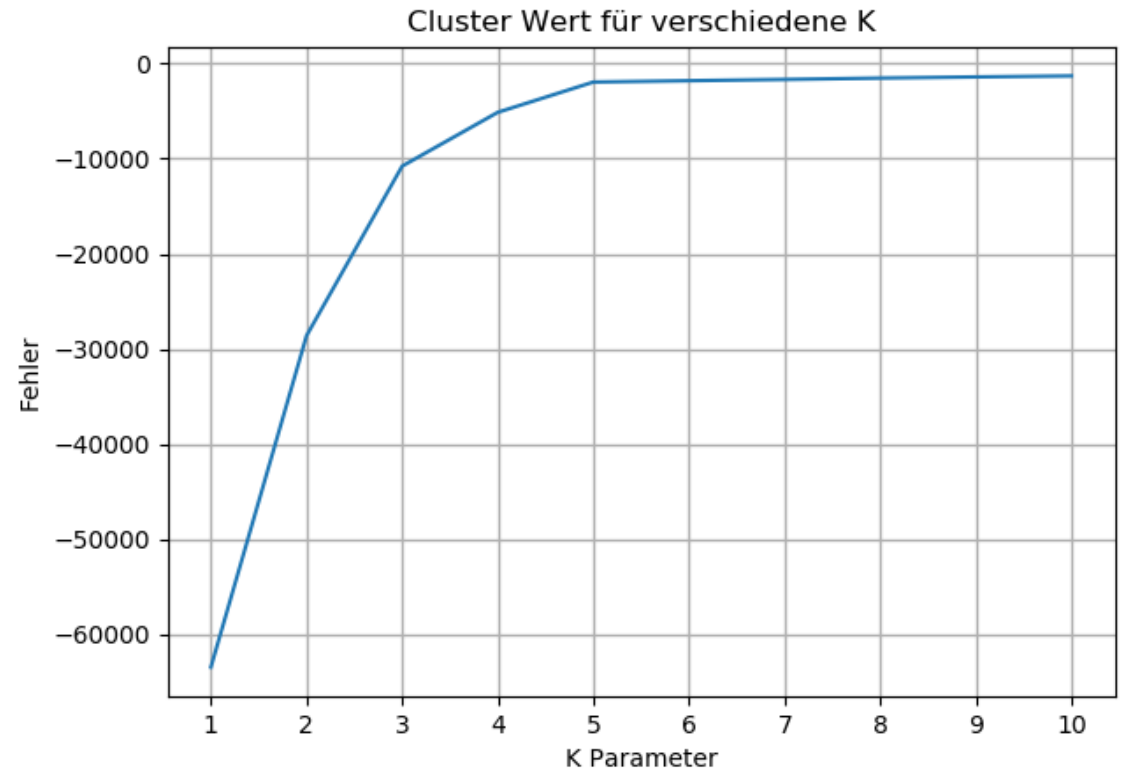
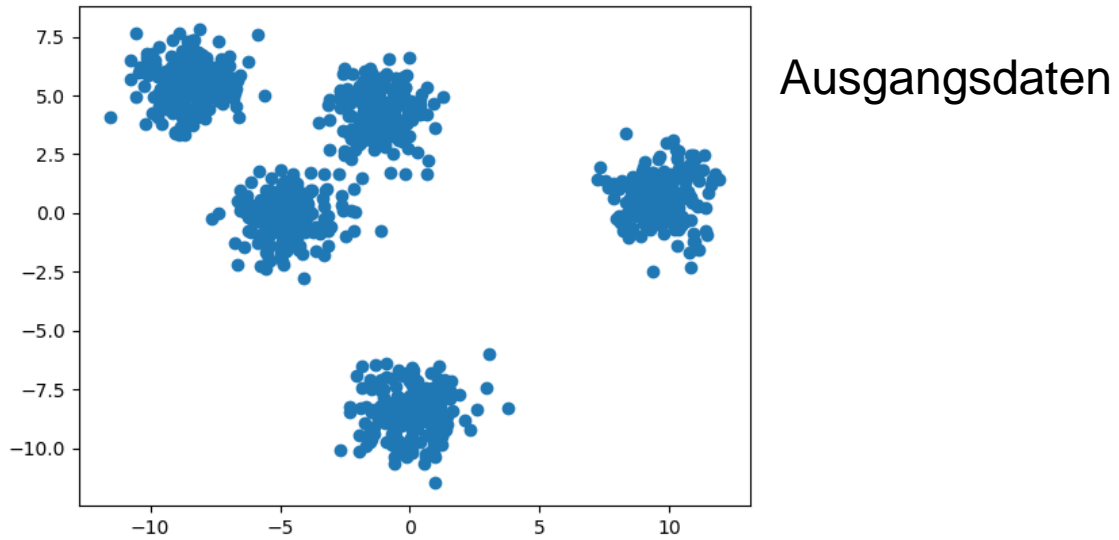


1.1. Einführung

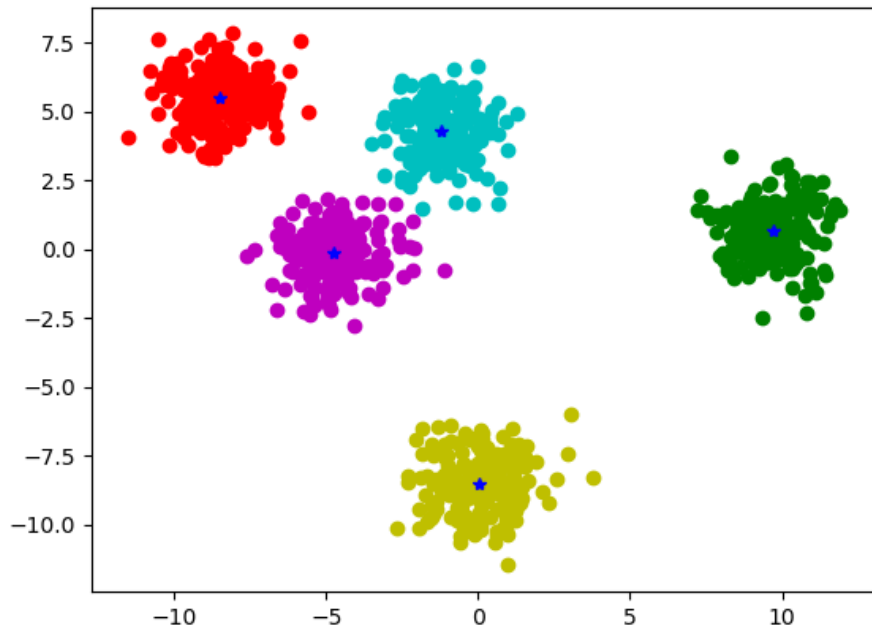
- Grüner Pkt. = zu bestimmender Punkt
- Rote Pkt. = Clustermittelpunkte (v_i)
- Distanz = schwarze Linie
- Lila Kreis = zugeteiltes Cluster des Punktes



1.1. Einführung



Zieldaten



(Elbow method)

1.2. Eigeneimplementierung

- Für unsere Eigenimplementierung benötigen wir wieder 2 Klassen
 - 1x Main-Klasse & die kMeans Klasse
- In der kMeans Klassen wollen wir 4 öffentliche Funktionen
 - Anzeigen der Ausgangsdaten
 - Anzeigen der optimalen k-Parameter Zuweisung
 - kMeans Berechnung ausführen
 - Anzeigen der zugeordneten Daten



1.2. Eigeneimplementierung

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.cluster import KMeans
```

```
# Aufruf zur Erstellung eines Objektes der Klasse
def kmean(data):
    return K_Means(data)
```

```
class K_Means:
    # Globale Deklaratio
    __data = []
    __centroids = []
    __labels = []
    __history_centroids = []
    __k = 1
```


1.2. Eigeneimplementierung

```
# Initialisierung  
def __init__(self, data):  
    self.__data = data  
  
# Euklidische Distanzberechnung  
def __euclidian(self, a, b):  
    return np.linalg.norm(a - b)
```



1.2. Eigeneimplementierung

Fkt. Ausgangsdaten plt

```
# Funktion, die zweidimensionalen Daten plottet
def plotData(self, colors=None):
    # X & Y herausfiltern
    x = self.__data[:, 0]
    y = self.__data[:, 1]

    # Plot, Figure erstellen & ploten
    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111)
    ax.scatter(x, y, c=colors)
    plt.show()
```

1.2. Eigeneimplementierung

Funktion, die ein Liniendiagramm zeichnet

Fkt. opti. k-Para. plt

```
def plotClusterScore(self):
```

```
    # Iteration um passendes K zu finden
```

```
    # Ergebnisse plotten
```

```
    scores = []
```

```
    for i in range(1, 11):
```

```
        # kMeans ausführen (sklearn) und jeweiligen Score ermitteln
```

```
        print("Clusterberechnung mit K=%d" % (i))
```

```
        kmeans = KMeans(n_clusters=i)
```

```
        kmeans.fit(self.__data)
```

```
        scores.append([i, kmeans.score(self.__data)])
```

```
    # Daten in numpy Array umwandeln, X & Y Werte filtern
```

```
    scores = np.array(scores)
```

```
    x = scores[:, 0]
```

```
    y = scores[:, 1]
```



1.2. Eigeneimplementierung

```
# Plot, Figure erstellen & ploten
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(x, y, '-')

# Diagrammtitel setzen
plt.title("Cluster Wert für verschiedene K")
plt.xlabel("K Parameter")

# Diagrammeinstellungen % show
plt.ylabel("Fehler")
plt.xticks(x)
plt.grid(linewidth=1)
plt.show()
```

1.2. Eigeneimplementierung

```
# kMeans ausführen
def kmeans(self, k, epsilon=0):
    # Deklaration
    self.__k = k
    history_centroids = []
    iteration = 0

    # Zeilen & Spaltenanzahl
    num_instances, num_features = self.__data.shape

    # Random Zentralpunkte setzen
    prototypes = self.__data[np.random.randint(0, num_instances - 1, size=k)]
    history_centroids.append(prototypes)
    prototypes_old = np.zeros(prototypes.shape)

    # Leeres Distanzarray
    labels = np.zeros((num_instances, 1))

    # Erste Distanzberechnung zu 0
    norm = self.__euclidian(prototypes, prototypes_old)
```

Fkt. kMeans ausführen



1.2. Eigeneimplementierung

```
# Solange der Fehler zu groß ist
while norm > epsilon:
    iteration += 1

    # Distanz des alter zu den neuen Zentralpunkten
    norm = self.__euclidian(prototypes, prototypes_old)
    prototypes_old = prototypes

    # finden des Zentralpunktes der kürzestens Distanz
    for index_instance, instance in enumerate(self.__data):
        dist_vec = np.zeros((k, 1))

        # Distanzen vom Dataset & Zentralpunkten
        for index_prototype, prototype in enumerate(prototypes):
            dist_vec[index_prototype] = self.__euclidian(prototype,
                                                         instance)

        # Zentralpunkt der kürzestens Dist speichern
        labels[index_instance, 0] = np.argmin(dist_vec)

    # Temp Zentroid
    tmp_prototypes = np.zeros((k, num_features))
```

1.2. Eigeneimplementierung

```
# Bestimmen der neuen Zentralpunkte
for index in range(len(prototypes)):
    # Clusterpunkte eines Zentroides
    instances_close = [i for i in range(len(labels)) if labels[i] == index]

    # Mittelwertbestimmung der Clusterpunkte (x & y Achsen)
    prototype = np.mean(self.__data[instances_close], axis=0)

    # Zentroid zu Temp hinzufügen
    tmp_prototypes[index, :] = prototype

# Zentralpunkt setzen
    prototypes = tmp_prototypes
    history_centroids.append(tmp_prototypes)

self.__centroids = prototypes
self.__labels = labels
self.__history_centroids = history_centroids

return prototypes, labels
```

1.2. Eigeneimplementierung

Fkt. Zieldaten plt

```
# Plotting der Cluster & Historie
def plotWithCentroid(self):
    # Deklaration
    colors = ['g', 'r', 'c', 'm', 'y', 'k', 'w']
    fig, ax = plt.subplots()
    history_points = []

    # Einfärben der Punkte anhand des Clusters
    for index in range(self.__k):
        # Clusterpunkte herausfinden
        instances_close = [i for i in range(len(self.__labels)) if self.__labels[i] == index]

        # Punkte einfärben
        for instance_index in instances_close:
            ax.plot(self.__data[instance_index][0], self.__data[instance_index][1], (colors[index] + 'o'))
```


1.2. Eigeneimplementierung

```
# Historie-Centroide durchgehen
for index, centroids in enumerate(self.__history_centroids):
    # Centroide des Historie-Centroides durchgehen
    for inner, item in enumerate(centroids):
        # Erster Durchlauf, Punkte zeichnen bzw erstellen
        if index == 0:
            history_points.append(ax.plot(item[0], item[1], 'bo', marker='*')[0])
        # Anderer Durchlauf, Position des Punkte ändern
        else:
            # Position des Punktes ändern
            history_points[inner].set_data(item[0], item[1])
            print("centroids {} {}".format(index, item))

        # Zeit zum zeichnen des t+1 Clusters
        plt.pause(0.3)

# Ende anzeigen
print('Finish')
plt.show()
```

1.2. Eigeneimplementierung

```
from sklearn.datasets import make_blobs
```

```
from kmeans import *
```

```
# Datensatz generieren
```

```
data, classes = make_blobs(n_samples=1000, centers=5, random_state=7)
```

```
# Objekt erstellen & Daten übergeben
```

```
kmeans = kmean(data)
```

```
# Daten ploten (ohne Klassen)
```

```
kmeans.plotData()
```

```
# Plot der Werte bei verschiedenen Clustergrößen
```

```
kmeans.plotClusterScore()
```

```
# KMeans ausführen
```

```
kmeans.kmeans(5)
```

```
# KMeans Plotten
```

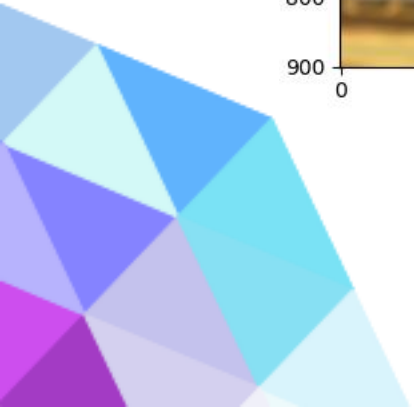
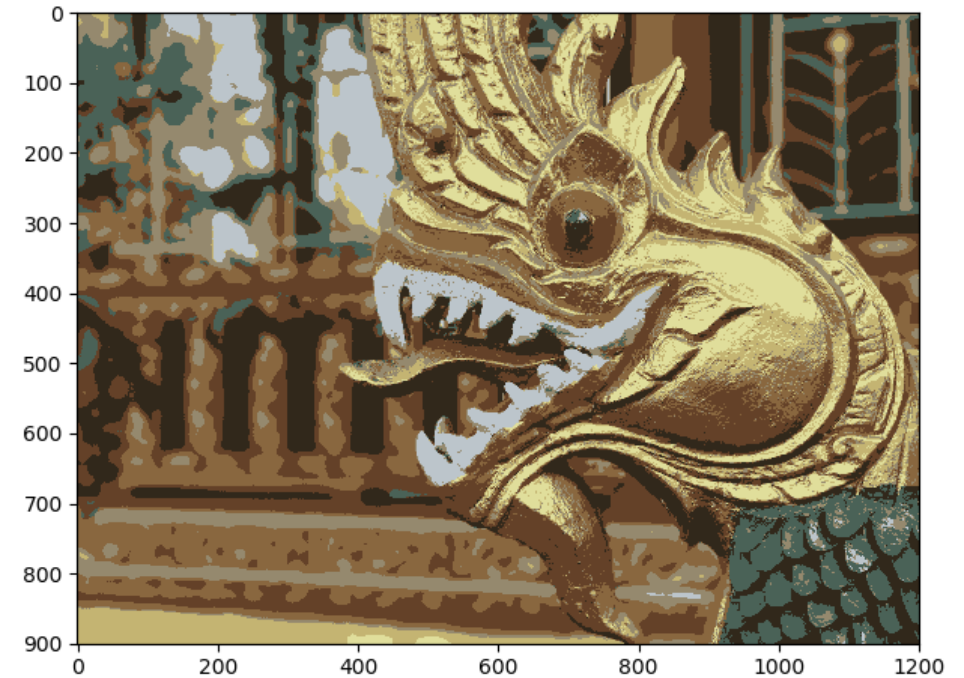
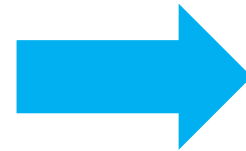
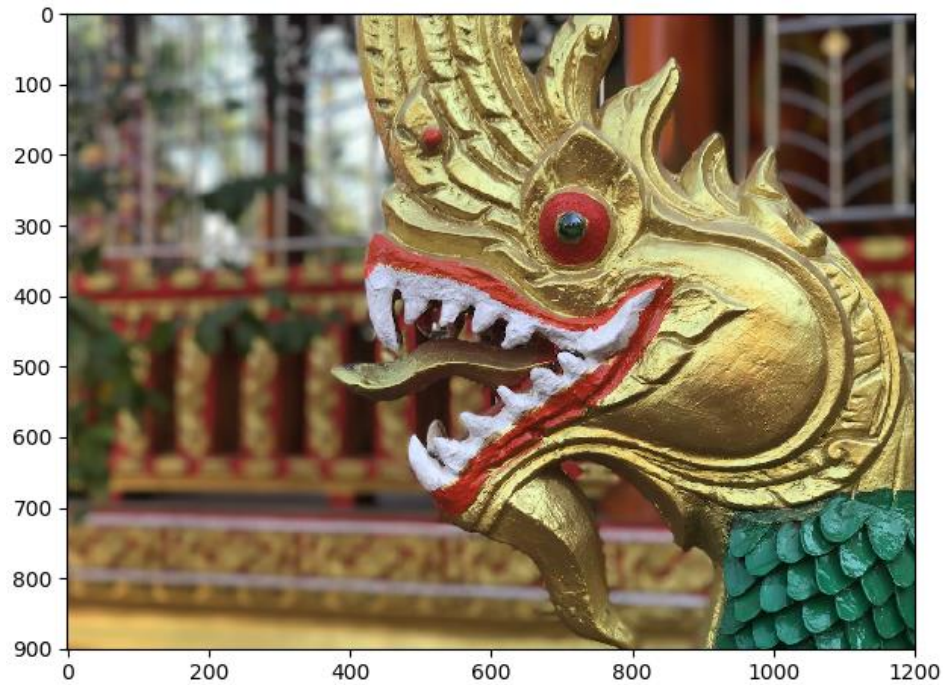
```
kmeans.plotWithCentroid()
```

Main Klasse



1.3. Beispiel Farbenskalierung im Bild

- Bild mit vielen Farben bzw. auf nur 8 Farben runter skalieren



1.3. Beispiel Farbenskalierung im Bild

```
from sklearn.cluster import KMeans
from skimage import io
import numpy as np
```

Main Klasse

```
# Bild
bild = io.imread('dragon.png')[:, :, :3]
```

```
# Anzeigen
io.imshow(bild)
io.show()
```

```
# Konvert -> 2 Dim Array
data = bild.reshape(-1, 3)
```

```
# kMeans Objekt erstellen, Daten übergeben & ausführen
# n_cluster = Anzahl der Farben
model = KMeans(n_clusters=8, n_init=1)
model.fit(data)
```



1.3. Beispiel Farbenskalierung im Bild

```
|# Centroiden      -> Farben
|# Klassifikatoren -> Pixel
colors = model.cluster_centers_.astype('uint8')
pixels = model.labels_

# Farben anhand der Klassifikation auslesen
pixel2show = colors[pixels]

# Shapen auf 900x1200 Pixel
pixel2show = np.array(pixel2show).reshape(900, 1200, 3)

# Neues Bild anzeigen
io.imshow(pixel2show)
io.show()
```



2.1. Fuzzy k-Means - Einführung

- Erweiterung / Abwandlung des k-Means
- Jeder Punkte wird hierbei nicht einem einzelnen Cluster zugeordnet, sondern JEDEM
 - Hierbei wird dem Punkte zu jedem Cluster eine Zuordnung in Prozent berechnet
 - Die Summer der Zuordnungen sind 100%
 - Hierfür kommt eine Zuordnungsmatrix zum Einsatz = U_{ik}
 - i = der Punkt
 - k = das Cluster



2.1. Einführung

- Als weitere Anpassungsvariable kommt der Fuzzyfier (Verschleifungsgrad) zum Einsatz
 - Einstellung für eine scharfe oder unscharfe Clusterung
 - m sehr groß: Zugehörigkeitswerte u_{ij} liegen ungefähr bei $1/c$
 - sehr unscharfe Clusterung(fuzzy)
 - M klein ($m=1, \dots, 2$): u_{ij} wird potenziert
 - kleinste Distanz dominiert den Nenner
 - sehr scharfe Clusterung(crisp)



2.1. Einführung

- Die Formeln für die Berechnung der Clustercenter (v_i) & Zuordnungsmatrix (u_{ik}) sind:

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m x_k}{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m}$$

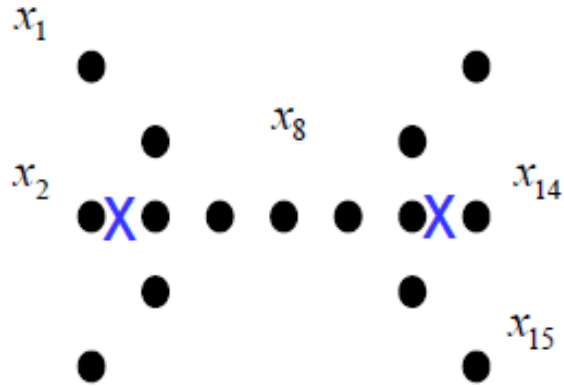
$$u_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^C \left(\frac{d_{ik}}{d_{jk}} \right)^{\frac{2}{m-1}}}$$

- x = Punkt
- u = Zuord. Pos.
 - i = Pos. des Clusters
 - k = Pos. des Punktes
- m = Fuzzyfier
- d = Distanz
 - j = Pos. des Clusters
 - k = Pos. des Punktes
- m = Fuzzyfier



2.1. Einführung

Beispiel:



$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_8 & \dots & \mathbf{x}_{14} & \mathbf{x}_{15} \\ 0.86 & 0.97 & \dots & 0.5 & \dots & 0.03 & 0.14 \\ 0.14 & 0.03 & \dots & 0.5 & \dots & 0.97 & 0.86 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{matrix}$$

• Bsp.

$$u_{11} = \frac{1}{\left(\frac{d_{11}}{d_{11}}\right)^{\frac{2}{2-1}} + \left(\frac{d_{11}}{d_{21}}\right)^{\frac{2}{2-1}}}$$

• d_{11} = Distanz des ersten Punktes zum ersten Clustercenter

2.2. Eigenimplementierung

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import math
```

```
def fuzzyk(data, m=2):
    return FuzzyK(data, m)
```

```
class FuzzyK:
    # Globale Deklaratio
    __data__ = []
    __centroids__ = []
    __history_centroids__ = []
    __labels__ = []
    __k__ = 1
```

2.2. Eigenimplementierung

```
# Fuzzy parameter  
__m = 2.00  
  
# Initialisierung  
def __init__(self, data, m):  
    self.__data = data  
    self.__m = m  
  
# Euklidische Distanzberechnung  
def __calcEuclidian(self, a, b):  
    return np.linalg.norm(a - b)
```



2.2. Eigenimplementierung

Init Member Matrix

```
# Initialisierung der MemberMatrix
def __initMemberMatrix(self):
    # leere Liste ertellen
    memberMat = list()

    # Liste der Punkte und deren Zugehörigkeit initialisieren
    for i in range(len(self.__data)):
        # (0) Zuordnung zu allen -> Random Vollzuordnung (1) zu 1 Centroid
        member = np.zeros(self.__k, dtype=float)
        member[random.randint(0, self.__k - 1)] = 1
        memberMat.append(member)

    return memberMat
```

2.2. Eigenimplementierung

```
# Berechnung aller Centroiden
def __calcClusterCenter(self, membership_mat):
    # Deklarationen
    centroiden = []

    # Berechnung pro Cluster
    for j in range(self.__k):
        # Neu Init
        sumUikXk = 0
        sumUikYk = 0
        sumUik = 0
```

Berechn. Centroids



2.2. Eigenimplementierung

```
# Summenfunktionen
for i in range(len(self.__data)):
    sumUikXk += membership_mat[i][j] ** self.__m * self.__data[i][0]
    sumUikYk += membership_mat[i][j] ** self.__m * self.__data[i][1]
    sumUik    += membership_mat[i][j] ** self.__m

# Berechnung des X & Y Punktes des Centroids
x = sumUikXk / sumUik
y = sumUikYk / sumUik

# Hinzufügen des Centroiden
centroiden.append([x, y])

return centroiden
```

2.2. Eigenimplementierung

Clusterzuweisung

```
# Aktualisieren der Zugehörigkeiten der Punkte
def __updateMemberMatix(self, membership_mat, cluster_centers):
    # Leeres Distanzarray
    labels = np.zeros((len(self.__data), 1))

    # Jedes Element der MemberMatrix bearbeiten
    for m_idx in range(len(membership_mat)):
        # Jede Zugehörigkeit der k (Cluster) berechnen
        for c_idx in range(self.__k):
            # Neu Init
            sumDikDjk = 0

            # Summenformel des Distanzmaße anhand der Cluster
            for k_idx in range(self.__k):
                # Zähler & Nennerberech des Summenformel
                dik = self.__calcEuclidian(self.__data[m_idx], cluster_centers[c_idx])
                djc = self.__calcEuclidian(self.__data[m_idx], cluster_centers[k_idx])
```

2.2. Eigenimplementierung

```
# Teilen durch 0 vermeiden  
if dik != 0:  
    # Quotient der Distanzen hoch... Beachtung des Fuzzyness Parameters  
    sumDikDjk += (dik / djk) ** (2 / (self.__m - 1))  
else:  
    sumDikDjk = float('nan')
```

```
# Laut Umstellung Fuzzy Formel  
sumDikDjk = sumDikDjk ** -1
```

```
# Hinzufüger der Clusterzuordnungen  
if math.isnan(sumDikDjk):  
    membership_mat[m_idx][c_idx] = 1  
else:  
    membership_mat[m_idx][c_idx] = sumDikDjk
```


2.2. Eigenimplementierung

```
# Centroid der maximalen Clusterzuordnung  
labels[m_idx, 0] = np.argmax(membership_mat[m_idx])  
  
# Selfvariable übergeben  
self.__labels = labels  
  
return membership_mat
```



2.2. Eigenimplementierung

Fuzzy kMeans

```
# FuzzyCMeans ausführen
def fuzzyCMeansClustering(self, k, epsilon=0.01, max_iteration=100, updateMat=None):
    # Initialisierung
    self.__k = k
    norm = 1
    iteration = 0
    cluster_centers_old = np.zeros(k * 2)
    cluster_centers = []

    # Init Funktion
    if updateMat is None:
        updateMat = self.__updateMemberMatrix

    # Member Matrix init
    member_mat = self.__initMemberMatrix()
```

2.2. Eigenimplementierung

```
# Differenz der alten & neuen Cluster zum Epsilonwert
while norm > epsilon or iteration > max_iteration:
    # Erhöhung der Iteration
    iteration += 1

    # Centroid & MemberMatrix Berechnung
    cluster_centers = self.__calcClusterCenter(member_mat)
    member_mat = updateMat(member_mat, cluster_centers)

    # Differenz der alten, neuen Cluster
    # Save new into old
    # ravel() in 1 Zeile konvertieren
    norm = self.__calcEuclidian(np.array(cluster_centers).ravel(), cluster_centers_old)
    cluster_centers_old = np.array(cluster_centers).ravel()
```

2.2. Eigenimplementierung

```
# Historie Centroid Konvertierung für Plotting  
centroid = []  
for idx in range(k):  
    centroid.append(cluster_centers[idx])  
self.__history_centroids.append(centroid)
```

```
self.__centroids = cluster_centers
```

```
return self.__centroids, self.__labels
```



2.2. Eigenimplementierung

Main Klasse

```
from sklearn.datasets import make_blobs
from fuzzykmeans import *

# Datensatz generieren
data, classes = make_blobs(n_samples=1000, centers=5, random_state=7)

# Objekt erstellen & Daten übergeben
fuzzyK = fuzzyk(data)

# Fuzzy kMeans ausführen
fuzzyK.fuzzyCMeansClustering(5)
#fuzzyK.GK_CMeansClustering(5)

# Plotting
fuzzyK.plot()
```



3.1. Gustafson-Kessel - Einführung

- Erweiterung des Fuzzy k-Means
- Eigenschaften
 - Repräsentiert hyperkugelförmige und hyperellipsoidale Clusterformen
 - Falls **C** schlecht konditioniert
 - numerische Probleme bei Invertierung
 - Konvergenzprobleme: lokale Minima in J_m



3.1. Einführung

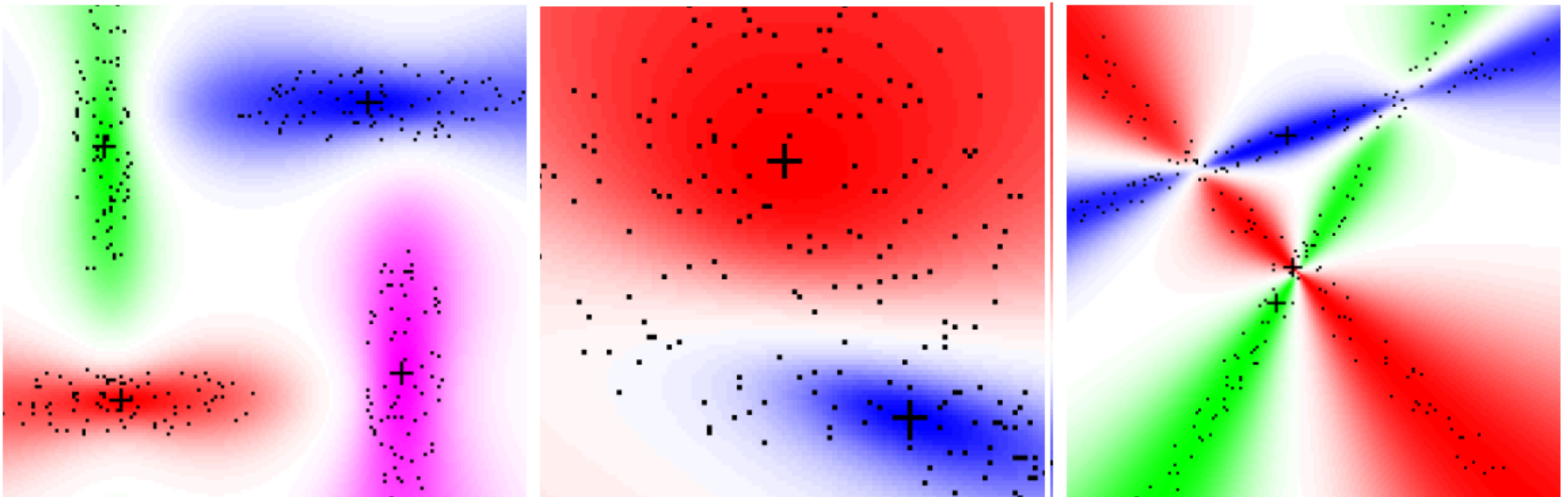
Distanzmaß:

Skalierte Mahalanobis Distanz
(Skalierung mit Streuvolumen)

Fuzzy-Kovarianzmatrizen

$$\|\mathbf{x}_j - \mathbf{v}_i\|^2 = \sqrt[n]{\det \mathbf{C}_i} (\mathbf{x}_j - \mathbf{v}_i)^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{x}_j - \mathbf{v}_i)$$

$$\mathbf{C}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n (u_{ij})^m (\mathbf{x}_j - \mathbf{v}_i)(\mathbf{x}_j - \mathbf{v}_i)^T ; N_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij})^m$$



3.2. Eigenimplementierung

Mahalanobis Dist.

```
# Skalierte Mahalanobis Distanzberechnung
def __calcMahalanobis(self, datepoints, v, ci):
    # Konvertieren un np.Array
    datepoints = np.array(datepoints)
    v = np.array(v)


    # Shapen damit nur Zeilenvektoren vorliegen
    # vi = Zeilenvektoren aller Cluster als Matrix -> Diff ist Matrix zw. xi und v(alle)
    xj = datepoints.reshape(datepoints.shape[0], 1, -1)
    vi = v.reshape(1, v.shape[0], -1)

    # Matrizen subtrahieren und um 1 Dim erhöhen -> Spaltenvektorbildung
    dif_xj_vi = np.expand_dims(xj - vi, axis=3)

    # Determinate bilden und Wurzel ziehen
    determ = np.power(np.linalg.det(ci), 1 / self.__m)
```


3.2. Eigenimplementierung

```
# Determinate Reshaper, damit alle Cluster einzeln und mal der Inverse von Ci gerechnet werden kann  
detCi_CiInvers = determ.reshape(-1, 1, 1) * np.linalg.inv(ci)  
  
# Transpose der 2 & 3 Dim -> aus Spalten- wird Zeilenvektor  
# Matrizen multiplikation  
temp = np.matmul(dif_xj_vi.transpose((0, 1, 3, 2)), detCi_CiInvers)  
  
# MatMultiplikation, auf 2 Dim runterbrechen & Transponieren  
output = np.matmul(temp, dif_xj_vi).squeeze().T  
  
# Rückgabe des größeren Wertes  
return np.fmax(output, 1e-8)
```



3.2. Eigenimplementierung

Kovarianz Matrix

```
# Fuzzy Kovarianzmatrizen bilden
def __covariance(self, dataPoints, v, u):
    # Umwandeln in np.Array & hoch m rechnen
    um = np.array(u).transpose() ** self.__m
    v = np.array(v)

    # Bilden der Summe Ni & der Diff xj zu vi
    ni = um.sum(axis=1).reshape(-1, 1, 1)
    xj_vi = dataPoints.reshape(dataPoints.shape[0], 1, -1) - v.reshape(1, v.shape[0], -1)

    # Umwandlung in Spaltenvektoren pro Cluster
    # expand_dims = erhöht die Dimensionen um 1
    # axis=3 Bezieht sich auch die dritte Achse die als neue Dimension dient
    # in dem Fall 4 Dimensionen da 1 Zeilenvektor zu 2 Dim. in Spaltenvektor is
    temp = np.expand_dims(xj_vi, axis=3)
```

3.2. Eigenimplementierung

```
# Transponieren der 3 mit 4 Dimension  
# Multiplizieren der Vektoren  
temp_trans = temp.transpose((0, 1, 3, 2))  
temp = np.matmul(temp, temp_trans)  
  
# Transponieren, erhöhen um 2 Dimensionen für die Multiplikation mit Matrix  
sum_fkt = um.transpose().reshape(um.shape[1], um.shape[0], 1, 1) * temp  
  
# Summe über 0 Dimension, bzw. summieren/zusammenfassen über jedes Cluster  
# Dim 0 = 1 DS für je dataPoint -> Summe bilden bezügl. Summenfkt  
sum_fkt = sum_fkt.sum(0)  
  
return sum_fkt / ni
```



3.2. Eigenimplementierung

Clusterzuweisung

```
# Aktualisieren der Zugehörigkeiten der Punkte
def __updateMemberMatix_GK(self, member_mat, cluster_centers):
    # Leeres Distanzarray
    labels = np.zeros((len(self.__data), 1))

    # Fuzzy Kovarianzmatrizen bilden
    f_dik = self.__covariance(self.__data, cluster_centers, member_mat)

    # Distanzwerte
    # Zähler & Nennerbereich des Summenformel
    dist = self.__calcMahalanobis(self.__data, cluster_centers, f_dik)

    # MemerMat updaten
    member_mat = np.transpose(self.__build_u(dist))

    # Centroid der maximalen Clusterzuordnung
    for idx in range(len(member_mat)):
        labels[idx] = np.argmax(member_mat[idx])

    # Selfvariable übergeben
    self.__labels = labels

    return member_mat
```

3.2. Eigenimplementierung

GK aufrufen

```
# FuzzyCMeans ausführen  
def GK_CMeansClustering(self, k, epsilon=0.01, max_iteration=100):  
    return self.fuzzyCMeansClustering(k, epsilon=epsilon, max_iteration=max_iteration,  
                                       updateMat=self.__updateMemberMatix_GK)
```

- Für die Main Klasse nutzen wir die vorherige aus dem Fuzzy k-Means und ändern die Zeile für Fuzzy k-Means ausführen zu GK Aufruf

Literaturhinweise

- Folien aus der Vorlesung CI1
 - CI1_05_Klassif-&Grupp-Analyse_3_Fuzzy-Cluster-Analyse
- <http://w3.ualg.pt/~jvo/ml2015-16/ml2015-16L17.pdf>
- https://de.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_C-Means
- <https://blog.ancud.de/home/-/blogs/einfuehrung-in-machine-learning-mit-python-k-means-clusteri-1>

