Approximationsmöglichekiten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Kapitel 7)

Grundbegriffe:

N	Grundgesamtheit
M	Anzahl der Merkmalsträger
n	Stichprobe
$P(x)$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses x
p	Wahrscheinlichkeit
μ	Durchschnittswert
e	eulersche Zahl

Formelsammlung: S. 57 – 58

Übungsaufgaben:

(1) Einer Lieferung von 4000 Bällen werden 150 ohne Zurücklegen entnommen. Werden dabei höchstens 2 fehlerhafte Bälle gefunden, wird die Lieferung übernommen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung nicht übernommen wird, wenn der Anteil der fehlerhaften Bälle in der Lieferung 4% beträgt.

<u>Gegeben:</u>

X: Anzahl der fehlerhaften Bälle

$N=4000$	Grundgesamtheit
$n=150$	Stichprobe
$p=0{,}04$	Wahrscheinlichkeit das ein Ball fehlerhaft ist
$M=p*N$	
$M=0{,}04*4000$	
$M=160$	Anzahl der fehlerhaften Bälle

<u>Gesucht:</u>

$P(x\leqslant 2)=?$

<u>Lösung:</u>

$$P(x \leqslant 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$$

$$P(x=x) = \frac{\binom{M}{x} * \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$ FS S.52 Hypergeometrische Verteilung

$$P(x \leqslant 2) = \frac{\binom{160}{0} * \binom{4000-160}{150-0}}{\binom{4000}{150}} + \frac{\binom{160}{1} * \binom{4000-160}{150-1}}{\binom{4000}{150}} + \frac{\binom{160}{2} * \binom{4000-160}{150-2}}{\binom{4000}{150}}$$

Der Taschenrechner wird wahrscheinlich nicht in der Lage sein, den Nenner auszurechnen weshalb man hier zu einer Approximation greifen sollte. Hierbei bieten sich die weiteren zwei uns bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen an.

a) Approximation durch Binomialverteilung

Voraussetzungen prüfen:

$$\frac{n}{N} < 0{,}05$$ FS S.58 Voraussetzung

$$\frac{150}{4000} < 0{,}05$$

$0{,}0375 < 0{,}05$ Voraussetzung erfüllt

Approximation:

$$P(x=x) = \binom{n}{x} * p^x * (1-p)^{(n-x)}$$ FS S.53 Binomialverteilung

$$P(x \leqslant 2) = \binom{150}{0} * 0{,}04^0 * 0{,}96^{150} + \binom{150}{1} * 0{,}04^1 * 0{,}96^{149} + \binom{150}{2} * 0{,}04^2 * 0{,}96^{148}$$

$$P(x \leqslant 2) = 0{,}22\,\% + 1{,}37\,\% + 4{,}25\,\%$$

$P(x \leqslant 2) = 5{,}84\,\%$, dass die Lieferung übernommen wird.

Daraus folgt, eine Wahrscheinlichkeit von 94,16%, dass die Lieferung nicht übernommen wird.

b) Approximation durch Poissonverteilung

Voraussetzungen prüfen:

$n > 10$		FS S.58 Voraussetzungen
$150 > 10$	Voraussetzung erfüllt	
$p < 0{,}05$		
$0{,}04 < 0{,}05$	Voraussetzung erfüllt	

Approximation:

$\mu = n * p$ FS S.58 Approximation

$\mu = 150 * 0{,}04$

$\mu = 6$

$P(x = x) = \frac{\mu^x * e^{-\mu}}{(x!)}$ FS S.53 Possionverteilung

$$P(x \leqslant 2) = \frac{6^0 * e^{-6}}{(0!)} + \frac{6^1 * e^{-6}}{(1!)} + \frac{6^2 * e^{-6}}{(2!)}$$

$P(x \leqslant 2) = 0{,}25\,\% + 1{,}49\,\% + 4{,}46\,\%$

$P(x \leqslant 2) = 6{,}2\,\%$, dass die Lieferung übernommen wird.

Daraus folgt, eine Wahrscheinlichkeit von 93,8%, dass die Lieferung nicht übernommen wird.

(2) In einem Unternehmen sind in einem Jahr 1 Million Buchungen angefallen. Der Anteil der Falschbuchungen betrug 0,1%. Bei einer Betriebsprüfung werden 2500 Buchungen überprüft.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht mehr als sechs Falschbuchungen gefunden werden.

$P(x \leqslant 6) = 98{,}58\,\%$ bei der Approximation durch Poissonverteilung

(3) Weitere Übungsaufgaben:

Weitere Übungsaufgaben zu diesem Kapitel sind erhältlich im „share"-Ordner der Fakultät Wirtschaft im Unterordner „Statistik".

Mit Blick auf die Klausur wäre es hilfreich die Aufgaben der ausgegebenen Klausuren zu üben. Bei den vorhandenen Übungsaufgaben, gibt es bei den anderen Aufgaben keinen Grund zur Approximation. Es lohnt sich also nur die Aufgaben zu üben, wenn man von sich aus approximiert.